Article Information

Journal Title: Représentations des groupes réductifs sur un corps local /

Volume: **Issue:**
Month/Year: 1984**Pages:** 119–157

Article Author: Pierre Deligne

Article Title: Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique 0.

Loan Information

Loan Title: Représentations des groupes réductifs sur un corps local / Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique 0.

Loan Author: Pierre Deligne

Publisher: Paris : Hermann, ©1984.
Place:
Date: 1984
Imprint:

Interlibrary Loan Request Form

Customer Information

Username: NDD

NDD User
123123123
None - None

Article Delivery Method:
Loan Delivery Method:
Electronic Delivery?

Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique O

P. DELIGNE

INTRODUCTION

D. Kazhdan a introduit en théorie des représentations d'un groupe réductif sur un corps local le principe que la théorie d'un corps local de caractéristique $p > 0$ est la limite des théories des corps locaux de caractéristique 0 de même corps résiduel, quand l'indice de ramification absolu e tend vers l'infini.

D'après la philosophie de Langlands, il faut s'attendre à ce que le même phénomène apparaisse pour les représentations linéaires (de dimension finie) du groupe de Galois $Gal(\overline{F}/F)$ d'un tel corps local. En fait, du côté galoisien, M. Krasner a mis ce phénomène en évidence dès les années quarante. Voir [3],[4],[5] . Pour l'étudier, M. Krasner a introduit l'hypercorps quotient multiplicatif d'un corps valué F par un idéal q de l'anneau $\mathcal{O}$ de la valuation. On suppose $q \neq \mathcal{O}$ et $q \neq 0$. Il s'agit de l'ensemble $F/(1+q)^*$ quotient de F par la relation d'équivalence $x \in (1+q).y$, muni de la multiplication et de l'addition (multivaluée) déduites de celles de F . Pour la description d'un objet (noté $O_q(F)$) qui porte la même information et n'utilise pas de loi de composition multivaluée, voir la fin de l'introduction.

Nous ne considérerons que des corps valués complets, la valuation étant à valeurs réelles (hauteur 1). Soient F un tel corps, et F_i une suite de tels corps. On suppose que F et les F_i sont munis de valuations ayant le même groupe $\Gamma \subset \mathbb{R}$ comme ensemble de valeurs et, pour $\gamma \in \Gamma$, on pose $m_i^\gamma = \{x \in F_i \mid v(x) \geq \gamma\}$ et $m^\gamma = \{x \in F \mid v(x) \geq \gamma\}$. M. Krasner dit que les F_i tendent vers F si, pour une suite $\gamma(i) \in \Gamma$ tendant vers $+\infty$, on s'est donné des isomorphismes de $F/(1+m^{\gamma(i)})^*$ avec $F_i/(1+m_i^{\gamma(i)})^*$. Pour tout idéal $q = m^\gamma$ de $\mathcal{O}_F$, si on pose $q_i = m_i^\gamma$, on en déduit pour tout i assez grand un isomorphisme de $F/(1+q)^*$ avec $F_i/(1+q_i)^*$. Si $P \in F[X]$ est un polynôme unitaire séparable, on sait que la F-algèbre $F[X]/(P)$ ne change pas (à isomorphisme canonique près) quand on perturbe suffisamment peu les coefficients de P . La méthode de Newton permet en effet de trouver un unique zéro de P près de chaque racine du polynôme perturbé. Si les F_i tendent vers F , on peut utiliser ce fait pour attacher à une extension séparable E de F une extension E_i de F_i pour i assez grand. M. Krasner montre que si E est galoisienne sur F ,

E_i l'est sur F_i, de même groupe de Galois, et que la structure de la ramification est préservée (pour i grand). Tout se lit déjà sur $F/(1+q)^*$, $q = m^\gamma$ pour γ grand, et $F/(1+q)^*$ est isomorphe à $F_i/(1+q_i)^*$, pour i grand.

Dans le présent article, nous nous limitons pour l'essentiel à considérer des corps valués complets pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait. Si un tel corps est de caractéristique $p > 0$ et donc isomorphe à un corps de séries formelles $k((x))$, il est facile de l'approcher par des corps de caractéristique 0. Nous précisons les résultats de M. Krasner limités au cas particulier considéré. Pour chaque puissance $q = m^e$ $(e \geq 1)$ de l'idéal maximal m de l'anneau de la valuation $\mathcal{O}$ de F, nous définissons une sous-catégorie pleine $\mathcal{E}_e$ de la catégorie $\mathcal{E}$ des extensions finies séparables de F. Elle croît avec e et $\mathcal{E}$ est la réunion des $\mathcal{E}_e$. Nous montrons que $\mathcal{E}_e$ ne dépend que de $F/(1+m^e)^*$. Plus précisément, nous construisons une catégorie $\mathcal{E}(F/(1+m^e)^*)$ ne dépendant que de $F/(1+m^e)^*$ et une équivalence de catégories canonique $\mathcal{E}_e \longrightarrow \mathcal{E}(F/(1+m^e)^*)$. La sous-catégorie pleine $\mathcal{E}_e$ de $\mathcal{E}$ a les propriétés de stabilité suivantes: avec une extension E de F, elle contient sa clôture normale et ses sous-extensions; avec deux extensions E' et E'' de F, elle contient leurs extensions composées. Si $\overline{F}$ est une clôture séparable de F, une telle sous-catégorie $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ correspond à un sous-corps F' de $\overline{F}$ galoisien sur F, $\mathcal{E}'$ et F' se déterminant mutuellement par les règles : F' est la réunion des $E \subset \overline{F}$ dans $\mathcal{E}'$, la sous-extension finie E de $\overline{F}$ est dans $\mathcal{E}'$ si et seulement si $E \subset F'$. Pour $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_e$, le sous-corps F' de $\overline{F}$ est le sous-corps fixe par $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^e$: le e-ième groupe de ramification en notation supérieure ([6] IV § 3 Remarque 1 page 83). En d'autres termes, pour qu'une extension galoisienne finie E de F soit dans $\mathcal{E}_e$, il faut et il suffit que le e-ième groupe de ramification en numérotation supérieure $\mathrm{Gal}(E/F)^e$ soit trivial. La catégorie $\mathcal{E}_e$ détermine le groupe profini

$$Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)/\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^e$$

à isomorphisme près, et même à un automorphisme intérieur près (3.5).

Le groupe profini $Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ ne dépend donc, à isomorphisme intérieur près, que de $F/(1+m^e)^*$. Que tel puisse être le cas nous a été suggéré par la théorie du corps de classe. Pour F à corps résiduel fini, celle-ci fournit en effet un isomorphisme canonique de l'abélianisé de $Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ avec le complété profini de $F^*/(1+m^e)^*$.

Parmi les compatibilités que nous prouvons, signalons les suivantes :

a. Soient F_i $(i = 1,2)$ comme ci-dessus. On affecte d'un indice i les objets relatifs à F_i. Soit donné un isomorphisme

$$F_1/(1+m_1^e)^* \simeq F_2/(1+m_2^e)^* .$$

Il fournit une équivalence de catégories

$$\mathcal{E}_e(F_1) \simeq \mathcal{E}(F_1/(1+m_1^e)^*) \simeq \mathcal{E}(F_2/(1+m_2^e)^* \simeq \mathcal{E}_e(F_2) .$$

Si l'extension E_1 de F_1 correspond à l'extension E_2 de F_2 (E_i dans $\mathcal{E}_e(F_i)$), les fonctions de Herbrand pour E_1/F_1 et E_2/F_2 sont les mêmes. Posons $r = \psi_{E_1/F_1}(e)$. Nous construisons un isomorphisme $E_1/(1+m_1^r)^* \simeq E_2/(1+m_2^r)^*$ (m_i étant ici l'idéal maximal de l'anneau de la valuation de E_i) et établissons pour lui diverses compatibilités naturelles.

b. Si les F_i sont à corps résiduels finis, nous prouvons la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} [Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}_1/F_1)]^{ab} & \simeq & [Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}_2/F_2)]^{ab} \\ \wr\Big| & & \Big|\wr \\ [F_1^*/(1+m_1^e)^*]^\wedge & \simeq & [F_2^*/(1+m_2^e)^*]^\wedge \end{array}$$

Dans ce diagramme, l'isomorphisme en première ligne est le quotient de l'isomorphisme (bien défini à isomorphisme intérieur près) $Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}_1/F_1) \simeq Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}_2/F_2)$ déduit de l'équivalence $\mathcal{E}_e(F_1) \simeq \mathcal{E}_e(F_2)$. L'isomorphisme en seconde ligne est déduit de l'isomorphisme $F_1/(1+q_1)^* \simeq F_2/(1+q_2)^*$ et les isomorphismes verticaux sont ceux du corps de classe pour les F_i.

Pour des corps F_i à corps résiduels algébriquement clos, on a une compatibilité analogue avec la théorie du corps de classe géométrique (3.8.1).

c. L'isomorphisme (bien défini à isomorphisme intérieur près) $Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}_1/F_1) \simeq Q^e\mathrm{Gal}(\overline{F}_2/F_2)$ induit une bijection entre les classes d'isomorphie de représentations complexes (continues et de dimension finie) des $\mathrm{Gal}(\overline{F}_i/F_i)$, triviales sur $\mathrm{Gal}(\overline{F}_i/F_i)^e$. Si les F_i sont à corps résiduels finis, des représentations V_i dont les classes d'isomorphie se correspondent donnent lieu aux mêmes facteurs L et ε (3.7).

Plutôt que l'hypercorps $F/(1+q)^*$ de Krasner, dont l'addition multivaluée nous met mal à l'aise, nous préférons utiliser l'objet $Q_q(F)$ suivant, qui porte exactement la même information : l'anneau gradué, de groupe de degrés le groupe $\Gamma = F^*/\mathcal{O}^*$ de la valuation de F et de composantes homogènes les

$$Q_q(F)^\gamma := \{x \in F \mid v(x) \geq \gamma\} / q\{x \in F \mid v(x) \geq \gamma\} ,$$

muni des morphismes $\varepsilon_{\delta,\gamma} : Q_q(F)^\gamma \longrightarrow Q_q(F)^\delta$ pour $\gamma \geq \delta$ déduits par passage au quotient des inclusions naturelles. On notera que le groupe multiplicatif des éléments homogènes inversibles de $Q_q(F)$ est canoniquement isomorphe à $F^*/(1+q)^*$.

Supposons la valuation discrète et normalisée de sorte que son groupe des valeurs soit $\mathbb{Z}$. L'anneau $Q_q(F)$ est alors $\mathbb{Z}$-gradué. Changeant de notations, nous écrirons $Q_e(F)$ pour ce qui plus haut eut été $Q_{m^e}(F)$ (m l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{O}$ de la valuation, $e \geq 1$). Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$, $m^n := \{x \in F \mid v(x) \geq n\}$. On a

$$Q_e(F) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} m^n/m^{n+e} ,$$

les morphismes $\varepsilon_{n',n} : m^n/m^{n+e} \longrightarrow m^{n'}/m^{n'+e}$ pour $n \geq n'$ étant déduits des inclusions $m^n \hookrightarrow m^{n'}$. La donnée de $Q_e(F)$ équivaut à celle de l'anneau $Q^o := Q_e(F)^o = \mathcal{O}/m^e$, du Q^o-module libre de rang un $Q^1 := Q_e(F)^1 = m/m^{e+1}$ et du morphisme de Q^o-module $\varepsilon = \varepsilon_{0,1} : Q^1 \longrightarrow Q^o$ de Q^1 sur l'idéal maximal de Q^o . On reconstitue $Q_q(F)^n$ comme étant la puissance tensorielle n-ième du Q^o-module inversible Q^1 et les $\varepsilon_{n',n}$ se déduisent de ε . Dans le texte, nous travaillerons avec le triple (Q^o,Q^1,ε) plutôt qu'avec $Q_{m^e}(F)$. Nous noterons ce triple $Tr_e(F)$. La classe d'isomorphie de Q^o détermine celle de (Q^o,Q^1,ε) , i.e. celle de $Q_e(F)$, mais le triple (Q^o,Q^1,ε) n'est pas déterminé à isomorphisme unique près par Q^o ; il admet des automorphismes non triviaux, mais triviaux sur Q^o .

J'avais d'abord pensé utiliser, plutôt que $Q_e(F)$ ou (Q^o,Q^1,ε) , simplement le quotient $Q^o = \mathcal{O}/m^e$. L'exemple suivant montre que cette approche fournirait des résultats moins précis. Prenons F à corps résiduel algébriquement clos et considérons la catégorie $\mathcal{E}_{mod}$ des extensions modérément ramifiées de F. On ne sait pas la reconstituer à équivalence unique à isomorphisme unique près rien qu'en terme du corps résiduel k de F. Pour $F = k((x))$, l'automorphisme $x \longmapsto \lambda x$ de F $(\lambda \in k)$, trivial sur k, aurait sinon une extension naturelle à $k((x^{1/N}))$ $(N > 1$ premier à la caractéristique), ce qui est absurde : pour λ une racine N-ième de 1, cet automorphisme d'ordre n ne peut pas être étendu en un automorphisme du même ordre. Par contre, cette catégorie $\mathcal{E}_{mod}$ est entièrement déterminée par $Q_1(F)$ ou, ce qui revient au même, par k, muni du k-espace vectoriel de rang un m/m^2 : le foncteur qui à une extension modérée E de F, de degré d, associe l'anneau gradué $Q_1(E) = \oplus\, m_E^n/m_E^{n+1}$, muni de sa structure naturelle de $Q_1(F)$-algèbre pour laquelle $Q_1(F) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{d|n} m_E^n/m_E^{n+1}$, est pleinement fidèle et on détermine aisément son image essentielle. A fortiori, la catégorie $\mathcal{E}_{mod}$ est déterminée par $\mathcal{O}/m^2$, mais travailler avec $\mathcal{O}/m^2$ plutôt qu'avec $(\mathcal{O}/m, m/m^2)$ serait moins précis.

A la source de notre usage de $Q_e(F)$ se trouve le fait suivant. Une extension totalement ramifiée E de F est obtenue en adjoignant à F une racine d'une équation d'Eisenstein $X^n + \Sigma\, a_i X^i = 0$, et il est plus précis de considérer l'image $\bar{a}_i$ de a_i dans m/m^{e+1} que dans $\mathcal{O}/m^e$. Si on voulait traiter de corps valués complets à corps résiduel non parfait, pour lesquels on ne peut plus factoriser chaque extension en une extension non ramifiée, définie par une extension séparable du corps résiduel, suivie d'une extension totalement ramifiée, il ne m'est pas clair que $Q_e(F)$ resterait préférable à $\mathcal{O}/m^e$.

1. PRESENTATION DES PERSONNAGES

1.1. Appelons <u>anneau de valuation tronqué</u> un anneau local R dont l'idéal maximal m est engendré par un élément, et nilpotent. Définissons la <u>longueur</u> $lg(R)$ de R comme étant celle du R-module R. C'est encore le plus petit entier ℓ tel que $m^\ell = 0$. On définit la <u>valuation</u> de $x \in R$ par $v(x) := \sup\{i \mid x \in m^i\}$. Elle est à valeurs dans l'intervalle $[0, lg(R)-1]$ de $\mathbb{Z}$, augmenté par $\{\infty\}$ (avec $v(0) = \infty$).

Tout anneau de valuation tronqué R est le quotient d'un anneau de valuation discrète V, qu'on peut supposer complet, par une puissance de l'idéal maximal. D'après les théorèmes de Cohen sur la structure des anneaux locaux complets, il existe en effet un anneau local complet régulier R_1 dont R soit quotient (EGA IV 1, 19.8.8). On peut choisir R_1 ayant même expace tangent de Zariski que R (passer à un quotient régulier). Si on exclut le cas trivial où R est un corps, R_1 est alors l'anneau V voulu.

Nous aurons à utiliser des triples (R,M,ε), formés d'un anneau de valuation tronqué à corps résiduel parfait R, d'un R-module libre de rang un M et d'un épimorphisme ε de M sur l'idéal maximal m de R. On déduit de ε, pour $r,s \in \mathbb{Z}$, $r < s$, un morphisme
$\varepsilon_{r,s} : M^{\otimes s} \longrightarrow M^{\otimes r} : x^{\otimes s} \longmapsto \varepsilon(x)^{r-s} \cdot x^{\otimes s}$.

La classe d'isomorphie de $S = (R,M,\varepsilon)$ ne dépend que de celle de R. Plus précisément, si $S' = (R',M',\varepsilon)$ est un autre triple, tout isomorphisme $u : R \xrightarrow{\sim} R'$ se relève en $\tilde{u} : S \xrightarrow{\sim} S'$. Si π est un générateur de M, relever u en $\tilde{u}$ revient à relever $u\varepsilon(\pi)$ – un générateur de l'idéal maximal m' de R' – en un générateur π' de M'. Si $\lg(R) > 1$, ε induit un isomorphisme $M/m^{\lg(R)-1}M \xrightarrow{\sim} m$, de même pour S', et d'après Nakayama tout relèvement de $u\varepsilon(\pi)$ est un générateur de M'.

A un triple $S = (R,M,\varepsilon)$, on associe

a) la R-algèbre graduée $Q(S) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^{\otimes n}$. Le choix d'un générateur π de M l'identifie à l'algèbre des polynômes de Laurent $R[T^{-1},T]$. Les $\varepsilon_{o,n} (n \geq 0)$ forment un morphisme de la sous-algèbre $\bigoplus_{n\geq o} M^{\otimes n}$ dans R.

b) Le groupe multiplicatif S^* des éléments homogènes inversibles de $Q(S)$. Le choix d'un générateur π de M l'identifie à $\mathbb{Z} \times R^*$, par l'application $\mathbb{Z} \times R^* \longrightarrow S^* : (n,x) \longmapsto x\cdot\pi^{\otimes n}$.

Soit π un générateur de M. On définit la <u>valuation</u> de $x = y\pi^{\otimes s} \in M^{\otimes s}$ par $v(x) = v(y)+s$. Si $\varepsilon_{r,s}(x) \neq 0$, on a $v(x) = v\varepsilon_{r,s}(x)$. La valuation $v : M^{\otimes s} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est à valeurs dans $[s,\lg R+s-1] \cup \{\infty\}$.

1.2 Nous appellerons <u>corps local</u> un corps valué complet pour une valuation discrète. Le corps résiduel sera toujours supposé parfait. Pour F un corps local, on notera $\mathcal{O}_F$ l'anneau de sa valuation, m_F l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$ et v_F la valuation, normalisée pour avoir $\mathbb{Z}$ comme groupe de valeurs. Si cela ne crée pas d'ambiguité, l'indice F sera omis.

Soient F un corps local et e un entier ≥ 1 . On notera $Tr_e(F)$ le triple (R,M,ε) suivant : $R = \mathcal{O}/m^e$, $M = m/m^{e+1}$ et ε = projection naturelle de m/m^{e+1} sur l'idéal maximal m/m^e de R . On a $lg(R) = e$. Soit π un générateur de m . Pour $s \in \mathbb{Z}$, on notera m^s l'idéal fractionnaire $\mathcal{O}\cdot\pi^s \subset F$. Il ne dépend pas du choix de π . Les isomorphismes, eux aussi indépendant de π : $m^{\otimes s} \longrightarrow m^s$: $x\pi^{\otimes s} \longmapsto x\pi^s$ induisent des isomorphismes

$$\oplus\, M^{\otimes s} \xrightarrow{\sim} \oplus\, m^s/m^{s+e} \quad \text{et}$$

$$Tr_e(F)^* \xrightarrow{\sim} F^*/(\text{unités} \equiv 1 \bmod m^e)^* \quad .$$

Via les isomorphismes $M^{\otimes s} \simeq m^s/m^{e+s}$, les $\varepsilon_{r,s}$ s'identifient aux applications $m^s/m^{e+s} \longrightarrow m^r/m^{e+r}$ déduites des inclusions $m^s \subset m^r$, et v sur $M^{\otimes s}$ se déduit de la restriction à m^s de la valuation de F .

Les triples $Tr_e(F)$ attachés à F sont, en substance, les "hypercorps valués quotients de F par un diviseur multiplicatif" que considère Krasner [5] .

Tout triple (R,M,ε) de 1.1 est isomorphe à l'un de ceux obtenu par le procédé 1.2.

1.3 Soient F un corps local à corps résiduel parfait et f réel ≥ 0 . Nous noterons $(\text{ext } F)^f$ la catégorie des extensions finies séparables E de F vérifiant la condition suivante C_F^f .

C_F^f . La clôture normale E_1 de E sur F vérifie $Gal(E_1/F)^f = \{1\}$.

Pour une liste de conditions équivalentes à C_F^f , voir l'appendice (A.6.1 et A.6.2).

L'essentiel de l'article consiste à (a) pour $S = (R,M,\varepsilon)$ comme en 1.1, avec $lg(R) = e$, construire une catégorie $(\text{ext } S)^e$; (b) pour F comme ci-dessus et e un entier ≥ 1 , construire une équivalence de catégories

$$T : (\text{ext } F)^e \longrightarrow (\text{ext } Tr_e F)^e \quad .$$

Si F' et F" sont deux corps locaux à corps résiduel parfait, munis d'uniformisantes π' , π'' , un isomorphisme $u : \mathcal{O}'/m'^e \longrightarrow \mathcal{O}''/m''^e$ envoyant la classe de π' sur celle de π'' induit un isomorphisme de $Tr_e(F')$ avec $Tr_e(F'')$. Des équivalences T et de cet isomorphisme, on déduit une équivalence

$$(\text{ext } F')^e \longrightarrow (\text{ext } F'')^e \quad .$$

En voici une description partielle. A une extension E' de F', vérifiant $C^e_{F'}$ et supposée pour simplifier totalement ramifiée, on fera correspondre l'extension E'' suivante de F''. On choisit une uniformisante x de E'. Elle vérifie une équation d'Eisenstein $P(x) = 0$. On écrit $P(X)$ sous la forme

$$P(X) = X^n + \pi' \Sigma a'_i X^i \quad .$$

L'isomorphisme u permet de faire correspondre aux a'_i des a''_i dans $\mathcal{O}''$, bien définis mod m''^e, et on prend pour E'' l'extension de F'' obtenue en adjoignant à F'' une racine du polynôme d'Eisenstein $X^n + \pi'' \Sigma a''_i X^i$. La condition $C^e_{F'}$ assure que l'extension E'' ne dépend pas, à isomorphisme unique près, du choix des a''_i. Notre introduction de la catégorie $(\text{ext } Tr_e F)^e$ et de T est une façon commode de vérifier qu'on obtient bien par cette construction un foncteur $(\text{ext } F')^e \longrightarrow (\text{ext } F'')^e$.

La définition de la catégorie $(\text{ext } S)^e$ et celle du foncteur T seront données au paragraphe 2.

1.4. On organise les triples (R,M,ε) de 1.1 en une catégorie $\mathcal{T}$ en définissant un <u>morphisme</u> f de $S = (R,M,\varepsilon)$ dans $S' = (R',M',\varepsilon)$ comme la donnée d'un entier r, (l'<u>indice de ramification</u>), d'un morphisme $\varphi : R \longrightarrow R'$ et d'un morphisme R-linéaire $\eta : M \longrightarrow M'^{\otimes r}$ envoyant un générateur de M sur un de $M'^{\otimes r}$, i.e. induisant un isomorphisme, encore noté η, $\eta : M \otimes_R R' \xrightarrow{\sim} M'^{\otimes r}$, et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta} & M'^{\otimes r} \\ \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon_{o,r}} \\ R & \xrightarrow{\varphi} & R' \end{array} \quad .$$

Soit π un générateur de l'idéal maximal m de R. Si $\varphi(\pi) \neq 0$, on a nécessairement $r = v(\varphi(\pi))$. Si $\varphi(\pi) = 0$, on a $r \geq \lg(R')$. On compose les morphismes par la formule

$$(r',\varphi',\eta')\circ(r,\varphi,\eta) = (r'r,\varphi'\circ\varphi,\eta'^{\otimes r}\circ\eta) \quad .$$

<u>Exemple</u> 1.4.1. Soient F un corps local à corps résiduel parfait, E une extension finie de F, r l'indice de ramification et e un entier. Le

morphisme structural $F \longrightarrow E$ induit des morphismes
$\varphi : \mathcal{O}_F/m_F^e \longrightarrow \mathcal{O}_E/m_E^{re}$ et $\eta : m_F/m_F^{e+1} \longrightarrow m_E^r/m_E^{r(e+1)} = m_E^r/m_E^{r+re} \simeq (m_E/m_E^{1+re})^{\otimes r}$
et (r,φ,η) est un morphisme $Tr_e(F) \longrightarrow Tr_{re}(E)$.

Exemple 1.4.2. Soient $S = (R,M,\varepsilon)$ dans $\mathcal{T}$, m l'idéal maximal de R et e un entier tel que $1 \leq e \leq \lg R$. La réduction mod m^e de S est le triple $(R/m^e, M/m^eM, \varepsilon)$. On dispose d'un morphisme naturel, d'indice de ramification 1, de S dans S mod m^e .

Soient $S = (R,M,\varepsilon)$ et $S' = (R',M',\varepsilon)$ dans $\mathcal{T}$ et $f = (r,\varphi,\eta) : S \rightarrow S'$ un morphisme. On note m, m' les idéaux maximaux de R , R' et k , k' les corps résiduels.

Nous dirons que f est plat, ou que S' est plat sur S si $\lg R' = r \lg R$. Si on exclut le cas où R est un corps $(\lg R = 1)$, ceci revient à demander que R' soit plat sur R . Les morphismes 1.4.1 sont plats.

Nous dirons que S' est fini sur S si R' est un R-module de type fini, i.e. si le corps résiduel k' de R' (ou, comme nous dirons, de S') est une extension finie de celui, k , de R . Les morphismes 1.4.1 et 1.4.2 sont finis.

Nous dirons que S' est étale sur S s'il est plat, fini et que $r = 1$. Rappelons que k est supposé parfait et que l'extension résiduelle k'/k est donc séparable. Si S' est étale sur S , R' est l'unique R-algèbre étale de corps résiduel k' . Elle est unique à isomorphisme unique près. On a $M \otimes_R R' \xrightarrow{\sim} M'$, et ε s'obtient par extension des scalaires. Le foncteur "corps résiduel" est une équivalence
(les S' étale sur S) $\longrightarrow$ (les extensions finies de k) et pour S' étale sur S , de corps résiduel k' et S'' sur S , de corps résiduel k'' , on a

$$\mathrm{Hom}_S(S',S'') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(k',k'') \quad .$$

Nous dirons que S' est totalement ramifié sur S si $k \xrightarrow{\sim} k'$.
Tout morphisme fini $f : S \longrightarrow S'$ admet une unique factorisation
$S \longrightarrow S'_o \longrightarrow S'$ avec S'_o étale sur S , de corps résiduel celui de S' , et S' totalement ramifié sur S'_o .

1.4.3. A l'imitation du cas des extensions de corps, on peut décrire T fini et plat sur S et totalement ramifié en terme d'un polynôme d'Eisenstein. Posons $S = (R,M,\varepsilon)$, $T = (A,I,\varepsilon)$ et soit (r,φ,η) le morphisme $S \longrightarrow T$.

Soit x un générateur de I. Comme R-module, A est libre de base les $\varepsilon(x)^i$ $(0 \leq i < r)$. Puisque $\eta : M \otimes_R A \longrightarrow I^{\otimes r}$ est un isomorphisme, il existe un unique système d'éléments $a_i \in M$ tels que

$$(1.4.3.1) \qquad x^{\otimes r} + \eta(\sum_1^r a_i \varepsilon(x)^{r-i}) = 0 \ ,$$

et, parce que $x^{\otimes r}$ est un générateur de $I^{\otimes r}$, a_r est un générateur de M. On appelle (1.4.3.1) l'équation d'Eisenstein vérifiée par x. Les a_i permettent de reconstituer T/S, muni de x : on a

$$A \simeq R[X]/(X^r + \Sigma \ \varepsilon(a_i)X^{r-i}) \ ,$$

I est le A-module libre muni d'une base x, avec $\varepsilon : x \mapsto X$ et η est défini par la condition que son inverse : $I^{\otimes r} \xrightarrow{\sim} M \otimes_R A$ envoie $x^{\otimes r}$ sur $\Sigma\, a_i \otimes X^{r-i}$. Tout système de a_i, avec a_r un générateur de M, fournit ainsi T/S fini plat totalement ramifié muni d'un générateur de I, dit <u>déduit</u> de S par adjonction d'une racine de (1.4.3.1).

Si E est l'extension du corps local F, à corps résiduel parfait, obtenue en adjoignant à F une racine x d'un polynôme d'Eisenstein $X^r + \Sigma\, a_i \ X^{r-i}$, et que $\bar{a}_i$ est l'image de a_i dans m/m^{e+1}, $Tr_{re}(E)$, muni de l'image de x dans m_E/m_E^{re+1}, est déduit de $Tr_e(F)$ par adjonction d'une racine de $x^{\otimes r} + \eta(\Sigma \ \bar{a}_i \ \varepsilon(x)^{r-i})$.

<u>Lemme</u> 1.4.4. <u>Soient</u> F <u>un corps local à corps résiduel parfait</u>, e <u>un entier</u> ≥ 1, $S = Tr_e(F)$ <u>et</u> T <u>fini et plat sur</u> S, <u>d'indice de ramification</u> r. <u>Il existe une extension finie séparable</u> E <u>de</u> F, <u>d'indice de ramification</u> r, <u>tel que</u> T/S <u>soit isomorphe à</u> $Tr_{re}(E)/Tr_e(F)$ (1.4.1).

Factorisant T/S en $T/S'/S$, avec S'/S non ramifié et T/S' totalement ramifié, on se ramène à supposer T/S étale ou totalement ramifié. Si T/S est étale, on prend pour E l'extension non ramifiée de F d'extension résiduelle celle de T/S. Si T/S est totalement ramifié, décrit par une équation d'Eisenstein (1.4.3.1), on relève les $a_i \in m/m^{e+1}$ en des $\tilde{a}_i \in m$ et on prend pour E l'extension de F obtenue en adjoignant une racine du polynôme d'Eisenstein $X^r + \Sigma \ \tilde{a}_i \ X^{r-i}$. Pour $r \neq 1$, prendre $\tilde{a}_{r-1} \neq 0$ pour être sûr que E/F est séparable.

1.5. Soit T/S fini et plat totalement ramifié, et reprenons les notations de 1.4.3. Notons b_i l'élément suivant de $I^{\otimes i}$ $(0 \leq i \leq r)$: $b_o = 1$ et pour $i > 0$,

$$b_i = \binom{r}{i} x^{\otimes i} + \sum_{j\leq i} \binom{r-j}{i-j} \varepsilon_{i,r} \eta(a_j) \varepsilon(x)^{i-j} .$$

Si $S = Tr_e(F)$, que E est l'extension de F obtenue en adjoignant à F une racine x du polynôme d'Eisenstein $P(X) = X^r + \Sigma\, \widetilde{a}_i X^{r-i}$ et que $T = Tr_{re}(E)$, muni du générateur de $I = m_E/m_E^{re+1}$ image de x , de sorte que a_i est la réduction de $\widetilde{a}_i$, les b_i sont obtenus par réduction à partir des coefficients du polynôme $\Sigma\, \widetilde{b}_i X^{r-i} := P(X+x)$. On a $b_o = \widetilde{b}_o = 1$ et $b_r = \widetilde{b}_r = 0$.

Soit n_T la fonction $[0,r-1] \to \mathbb{R}$ telle que le <u>polygone de Newton</u> enveloppe convexe de l'ensemble des $(i,v(b_i))$ soit l'ensemble des (x,y) avec $y \geq n_T(x)$. La fonction n_T est linéaire de $r-2$ à $r-1$ et on note $\widetilde{n}_T$ son prolongement à $[0,r]$ linéaire de $r-2$ à r .

<u>Proposition</u> 1.5.1. <u>Avec les notations précédentes, si le nombre réel</u> f <u>vérifie</u> $0 \leq f \leq e$, <u>pour que</u> E/F <u>vérifie la condition</u> C^f <u>de</u> 1.3, <u>il faut et il suffit que</u> $n_T(r) < r(f+1)$. <u>Si cette condition est remplie, l'enveloppe convexe de l'ensemble des</u> $(i,v(b_i))$ <u>coïncide avec celle de l'ensemble des</u> $(i,v(\widetilde{b}_i))$.

<u>Notation</u> . Nous utiliserons la notation v_E de A.2.a.

<u>Preuve</u> . Soit n_E la fonction $[0,r-1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que l'enveloppe convexe des $(i,v(\widetilde{b}_i))$ soit l'ensemble des (x,y) avec $y \geq n_E(x)$. La théorie du polygone de Newton et (A.3) disent que, si z_o est une racine de P dans une extension séparable assez grande de F , et qu'on range les autres racines dans un ordre tel que $v(z_i - z_o)$ soit croissant avec i $(1 \leq i \leq r-1)$, la fonction n_E interpole linéairement la fonction $n \longmapsto \sum_{i\leq n} v_E(z_i - z_o)$. Soit $\widetilde{n}_E : [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ le prolongement de n_E , linéaire de $r-2$ à r . D'après A.6.1, la condition C^f équivaut à

$$\widetilde{n}_E(r) < r(f+1) .$$

Puisque $b_i \in I^{\otimes i}$ est la réduction de $\widetilde{b}_i \in m_E^i$, on a

$$v(b_i) = \begin{cases} v(\tilde{b}_i) & \text{si } v(\tilde{b}_i) < re+i \\ \infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ceci donne la relation entre n_T et n_E : la fonction n_T est définie par l'enveloppe convexe de l'ensemble des $(i, v(b_i))$ et n_E par celle des $(i, v(\tilde{b}_i))$. Puisque $v_E(\tilde{b}_i) \geq i$, la fonction n_E est de pente ≥ 1 . Si $\tilde{n}_E(r) < r(e+1)$, on a donc pour tout $i \leq r$ $\tilde{n}_E(i) < r(e+1)-(r-i)$ et pour tout point extrémal $(i, v(\tilde{b}_i))$ de l'enveloppe convexe des $(i, v(\tilde{b}_i))$, $v(\tilde{b}_i) < r(e+1)-(r-i) = re+i$, de sorte que $v(b_i) = v(\tilde{b}_i)$ et $n_T = n_E$. Si par contre pour un de ces points extrémaux on a $v(b_i) = \infty$, i.e. $v(\tilde{b}_i) \geq re+i$, on a pour chaque $j \geq i$, $v(\tilde{b}_j) \geq n(j) \geq re+i+(j-i) = re+j$, $v(b_j) = \infty$ et $\overline{n}_T(r) = \infty$. Ceci prouve le

<u>Lemme</u> 1.5.2. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) E/F <u>vérifie</u> C^e ; (b) $\tilde{n}_E(r) < r(e+1)$; (c) $n_E = n_T$;

(d) $\tilde{n}_T(r) \neq \infty$.

Puisque pour $f \leq e$, C^f implique C^e , on en déduit 1.5.1 .

1.5.3. Pour t réel ≥ -1 , définissons r_t par

$r-r_t$ = le plus petit entier g tel que n_T soit de pente $< t+1$ sur $[0,g[$. Si les conditions équivalentes de 1.5.2 sont satisfaites, cette fonction coïncide avec celle de même nom pour E/F (A.3.4). Posons

$$\varphi_{T/S}(u) = \int_0^u dt/(r_o : r_t)$$

(et $\varphi_{T/S}(u) = u$ pour $-1 \leq u \leq 0$), et soit $\Psi_{T/S}(u)$ la fonction inverse. Si les conditions équivalentes de 1.5.2 sont vérifiées, ce sont les fonctions de Herbrand φ et Ψ pour E/F . Ces interprétations montrent que la validité des conditions de 1.5.2 et, si celles-ci sont vérifiées, les fonctions r, φ et Ψ ne dépendent pas du choix du générateur x de I .

1.5.4. Soit T/S fini et plat et factorisons T/S en T/S'/S avec S'/S étale et T/S' totalement ramifié.

Posons $S = (R, M, \varepsilon)$ et $e = lg(R)$. Pour $0 \leq f \leq e$, nous noterons C^f la condition suivante.

C^f. T/S' vérifie la condition $\tilde{n}_T(r) < r(f+1)$ de 1.5.1.
Si la condition C^e est vérifiée, on définit les fonctions r_t $(t \geq -1)$, $\varphi_{T/S}$ et $\psi_{T/S}$ comme étant les fonctions de même nom pour T/S' .

1.6 Soit $f : S \longrightarrow T$ dans $\mathcal{T}$, fini et plat. Nous nous proposons de définir un morphisme <u>norme</u> $N_{T/S} : T^* \longrightarrow S^*$. Posons $S = (R,M,\varepsilon)$, $T = (A,I,\varepsilon)$, $f = (r,\varphi,\eta)$ et soit n le degré de l'extension résiduelle. En tant que R-module, la R-algèbre A est libre de rang nr , d'où une norme $N_{A/R} : A^\times \to R^\times$. En degré 0 , c'est la norme cherchée.

Pour x un générateur de I , définissons $Nx \in M^{\otimes n}$. Supposons d'abord T étale sur S . Pour π un générateur de M et $x = a\eta(\pi)$, on pose $N(a\eta(\pi)) = N(a)\cdot\pi^{\otimes n}$. Avec cette définition, $N(x)$ est indépendant du choix de π , et pour $a \in A^*$ vérifie $N(ax) = N(a)N(x)$. Cette norme s'étend en $N : T^* \longrightarrow S^*$.

Supposons T totalement ramifié sur S . Soit (1.4.3.1) l'équation d'Eisenstein vérifiée par x . On pose $N(x) = (-1)^r a_r$. Pour F convenable, on a $S \simeq Tr_e(F)$ et d'après 1.4.4 on peut trouver E/F tel que T soit $Tr_{re}(E)$. La norme $I^* \longrightarrow M^*$ est induite par $N_{E/F}$. En particulier, elle vérifie $N(ax) = N(a)N(x)$ pour $a \in A^*$, donc se prolonge par multiplicativité en $N : T^* \to S^*$.

Pour T/S quelconque, $N_{T/S}$ est défini par composition, à partir des cas totalement ramifiés et étales. Pour un morphisme 1.4.1, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{N} & F^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Tr_{re}E^*)^* & \xrightarrow{N} & (Tr_e F)^* \end{array}$$

est commutatif.

1.7 Des arguments analogues fournissent un morphisme <u>trace</u>

$$Tr : I \longrightarrow M \quad .$$

Pour T étale sur S , et π un générateur de M , il se déduit de $Tr_{A/R}$ par $Tr(x\eta(\pi)) = Tr_{A/R}(x)\cdot\pi$. Pour T totalement ramifié sur S , et x un générateur de I , on prend $Tr(x) = -a_1$ (a_i comme en 4.3.1). Pour x quelconque dans I , on écrit x comme une somme de générateurs : $x = \Sigma x_i$, et on pose $Tr(x) = \Sigma\ Tr(x_i)$. Que la trace ainsi définie ne dépend pas du choix des x_i se déduit de ce que, pour $f : S \longrightarrow T$ du type I.4.1, Tr est induit par $Tr_{E/F}$. Le cas général s'obtient par composition, et on a : pour T/S défini par une extension E/F (1.4.1), le diagramme

$$\begin{tikzcd} m_E \arrow[r, "Tr_{E/F}"] \arrow[d] & m_F \arrow[d] \\ I \arrow[r, "Tr"] & M \end{tikzcd}$$

est commutatif.

2. LE THEOREME PRINCIPAL

2.1 Soit $S = (R,M,\varepsilon)$ un triple comme en 1.1, i.e. un objet de $\mathcal{T}$ (1.4) Nous définissons la catégorie (ext S) comme étant la catégorie des S' au-dessus de S , i.e. munis de $f : S \longrightarrow S'$, avec S' fini et plat sur S . Un morphisme $g : (S',f') \longrightarrow (S'',f'')$ est un morphisme $g : S' \longrightarrow S''$ tel que $gf' = f''$. Automatiquement, S'' est plat sur S' : si $S' = (A',I',\varepsilon)$, $S'' = (A'',I'',\varepsilon)$, $f' = (r',\varphi',\eta')$, $f'' = (r'',\varphi'',\eta'')$ et $g = (r,\varphi,\eta)$, on a $r'' = rr'$, car $f'' = gf'$, et de $\lg A' = r' \lg R$ et $\lg A'' = r'' \lg R$ résulte que $\lg A'' = r \lg A'$.

Soient F un corps local à corps résiduel parfait et e un entier ≥ 1. On définit un foncteur

$$T_o : (\text{extensions finies de } F) \longrightarrow (\text{ext } Tr_e F)$$

en attachant à une extension E de F , d'indice de ramification r , le triple $Tr_{er}(E)$, muni du morphisme 1.4.1 : $Tr_e F \longrightarrow Tr_{er} E$. Pour $u : E \longrightarrow E'$ un morphisme d'extensions, d'indice de ramification s , $T_o(u) : Tr_{er}(E) \longrightarrow Tr_{ers}(E')$ est le morphisme 1.4.1 déduit de u .

<u>Lemme</u> 2.1.1 (i) <u>Le foncteur</u> T_o <u>est essentiellement surjectif sur les classes d'isomorphie d'objets.</u>
(ii) <u>Pour que</u> E'/E <u>soit étale</u> <u>(resp. totalement ramifié)</u>, <u>il faut et il suffit que</u> $T_o(E')/T_o(E)$ <u>le soit</u>.
(iii) <u>Si</u> $f \leq e$, <u>pour que</u> $T_o(E)$ <u>vérifie</u> C^f (1.5.4), <u>il faut et il suffit</u>

que E *vérifie* C^f (1.3).

L'assertion (ii) est triviale, (i) est (1.4.4) et (iii) se ramène au cas totalement ramifié, traité en 1.5.1.

2.2. Soient X' , X'' dans (ext S). Notations : $X' = (A',I',\varepsilon)$, $(r',\varphi',\eta') : S \longrightarrow X'$ est le morphisme structural et de même pour X'' . On suppose X' totalement ramifié. Soit x un générateur de I' et

(2.2.1) $$x^{\otimes r'} + \eta'(\Sigma\ a_i\ \varepsilon(x)^{r'-1}) = 0$$

son équation d'Eisenstein (1.4.3). Il n'y a de morphisme de X' dans X'' que si $r' \mid r''$. Supposons que tel est le cas et posons $s = r''/r'$. On déduit de la description 1.4.3 de X comme déduit de S par adjonction d'une racine de (2.2.1) que la donnée d'un morphisme de X' dans X'' équivaut à celle de $y \in I''^{\otimes s}$ (l'image de x) vérifiant

(2.2.2) $$y^{\otimes r'} + \eta''(\Sigma\ a_i\varepsilon_{os}(y)^{r'-i}) = 0 \quad \text{dans} \quad I''^{\otimes r''} \xleftarrow[\sim]{\eta''} M \otimes_R A'' .$$

Pour $S = Tr_e(F)$, $X' = T_o(E')$, $X'' = T_o(E'')$, x l'image de $\tilde{x}$ vérifiant l'équation d'Eisenstein $\tilde{x}^{r'} + \Sigma\ \tilde{a}_i\tilde{x}^{r'-i} = 0$ et $y \in I''^{\otimes s}$ image de $\tilde{y} \in m''^{s}$, pour que 2.2.2 soit vérifié, il faut et il suffit que

(2.2.3) $$v_F(\tilde{y}^{r'} + \Sigma\ \tilde{a}_i\ \tilde{y}^{r'-i}) \geq e+1 \quad .$$

On a en effet $I''^{\otimes r''} \simeq m''^{r''}/m''^{r''(e+1)}$.

2.3. Soient X' et X'' dans (ext S) et reprenons les notations de 2.2. Pour f un nombre réel ≥ 0 , nous définissons $R(f)$ comme étant la relation d'équivalence suivante entre morphismes de X' dans X'' : si $u_i : X' \longrightarrow X''$ $(i = 1,2)$ sont deux morphismes de X' dans X'' , $u_i = (s,\varphi_i,\eta)$, $u_1 \equiv u_2$ (mod R(f)) signifie que l'on a :
R(f) . φ_1 et φ_2 induisent le même morphisme sur les corps résiduels et, pour tout x dans I' , on a $v(\eta_1(x)-\eta_2(x)) \geq s(f+1)$.

Remarques (i) Si X' est totalement ramifié sur S et que x_o est un générateur de I' , on a

$$u_1 \equiv u_2\ (R(f)) \iff v(\eta_1(x_o)-\eta_2(x_o)) \geq r(f+1) \quad .$$

(ii) Soient k, k' et k'' les corps résiduels de S, X' et X'', et X'_{nr} l'extension étale de S d'extension résiduelle k'/k. On a $\mathrm{Hom}_S(X'_{nr},X'') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(k',k'')$ (1.4.2). Si $\overline{\varphi} : k' \longrightarrow k''$ est donné, d'où $\overline{\varphi}_{nr} : X'_{nr} \longrightarrow X''$, on a

$$\mathrm{Hom}_{X'_{nr}}(X',X'') \xrightarrow{\sim} \{u \in \mathrm{Hom}_S(X',X'') \mid u \text{ induit } \overline{\varphi}\} .$$

Pour que deux morphismes au membre de gauche soient $R(f)$-équivalents, il faut et il suffit que leurs images le soient.

<u>Lemme</u> 2.3.1. <u>Soient</u> $S = \mathrm{Tr}_e(F)$, $X' = T_o(E')$ <u>et</u> $X'' = T_o(E'')$. <u>On suppose que</u> E' <u>vérifie</u> C^e <u>et on pose</u> $e' = \Psi_{E'/F}(e) = \Psi_{X'/S}(e)$ (1.5.3). <u>Le foncteur</u> T_o <u>induit une bijection de</u> $\mathrm{Hom}_F(E',E'')$ <u>avec l'ensemble des classes de</u> $R(e')$-<u>équivalence de morphismes</u> $X' \longrightarrow X''$ <u>dans</u> (ext S).

<u>Preuve</u> . On conserve les notations de 2.2 et 2.3. Supposons tout d'abord E'/F totalement ramifié. Soit $\tilde{x}$ une uniformisante de E', x son image dans I' et P le polynôme d'Eisenstein dont $\tilde{x}$ est racine. D'après 2.2, se donner $u : X' \longrightarrow X''$ revient à se donner $\tilde{y}$ dans E'', de valuation le quotient $s = r''/r'$ des indices de ramification de X' et X'', modulo éléments de valuation $\geq s+er''$ et vérifiant (2.2.3). La condition C^e garantit que pour y_1, y_2 dans E'' racines de P, on a $v_{E'}(y_1-y_2) > \Psi_{E'/F}(e)+1$ et que pour $\overline{y}$ vérifiant (2.2.3), il existe une (et une seule) racine y_1 avec $v_{E'}(\tilde{y}-y_1) \leq \Psi_{E'/F}(e)+1$. Pour $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ vérifiant (2.2.3), que les morphismes correspondant soient congrus mod $R(f)$ équivaut à

$$r'v_F(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2) \leq f+1 .$$

L'assertion en résulte pour E'/F totalement ramifié, et on en déduit le cas général par la remarque (ii) ci-dessus.

<u>Lemme</u> 2.4. <u>Soient</u> X', X'' <u>et</u> X''' <u>dans</u> (ext S), $u : X'' \longrightarrow X'''$ <u>et</u> $v_1,v_2 : X' \longrightarrow X''$. <u>Quel que soit</u> f, <u>si</u> $v_1 \equiv v_2 \pmod{R(f)}$, <u>alors</u> $uv_1 \equiv uv_2 \pmod{R(f)}$.

La vérification est laissée au lecteur.

Lemme 2.5. Soient X' , X'' et X''' dans (ext S), $u_1,u_2 : X'' \longrightarrow X'''$ et $v : X' \longrightarrow X''$. On suppose que X' et X'' vérifient C^e . Si $u_1 \equiv u_2$ (mod $R(\Psi_{X''/S}(e))$) , alors $u_1 v \equiv u_2 v$ (mod $R(\Psi_{X'/S}(e))$).

Preuve . Supposons tout d'abord X' et X'' totalement ramifiés sur S . On peut supposer (1.2), et on suppose que $S = Tr_e(F)$, puis que $X' = T_o(E')$, $X'' = T_o(E'')$ et $X''' = T_o(E''')$. D'après 2.3.1, il existe $j : E' \longrightarrow E''$ tel que $v \equiv T_o(j)$ (mod $R(\Psi_{E'/F}(e))$) . Appliquant 2.4, on se ramène à supposer que $v = T_o(j)$. Soient x une uniformisante de E' , y une de E'' et identifions E' à un sous-corps de E'' , à l'aide de j . Ecrivons x comme un polynôme en y à coefficients dans $\mathcal{O}_F$: $x = G(y)$, et soient P et Q les polynômes d'Eisenstein à coefficients dans F dont x et y sont respectivement racines.

D'après 2.2 , chaque morphisme $X'' \longrightarrow X'''$ est défini par une solution approchée y' de Q dans E''' : $v_F Q(y') \geq e+1$. Pour que deux solutions approchées y', y'' définissent des morphismes congrus mod $R(\Psi_{E''/F}(e))$, il faut et il suffit que

$$v_{E''}(y'-y'') \geq \Psi_{E''/F}(e) + 1 \ .$$

On a une description analogue pour les morphismes $X' \longrightarrow X'''$, en terme de solutions approchées de P , et la composition avec $v : X' \longrightarrow X''$ s'interprête comme $y' \longmapsto G(y')$. Ceci ramène 2.5 (cas totalement ramifié) au

Lemme 2.6. Si y' et y'' sont des solutions approchées de Q : $v_F Q(y'), v_F Q(y'') \geq e+1$, et que $v_{E''}(y''-y') \geq \Psi_{E''/F}(e)+1$, alors

$$v_{E'}(G(y'')-G(y')) \geq \Psi_{E'/F}(e)+1 \ .$$

Soit R le polynôme minimal de y sur E' . Puisque $x = G(y)$, on a $R(X) \mid x-G(X)$. Appliquant 2.3.1, onse ramène à supposer qu'une des solutions approchées y', y'' - disons y'' - est une solution exacte : $Q(y'') = 0$. A cette solution correspond un plongement $E'' \hookrightarrow E'''$, par lequel nous identifierons E'' à un sous-corps de E''' : $y = y''$. Avec ces notations, il faut vérifier que si y' dans E''' vérifie $v_{E''}(y'-y) \geq \Psi_{E''/F}(e)+1$, alors

$$v_{E'}(x-G(y')) \geq \Psi_{E'/F}(e)+1 \ .$$

Puisque $R(X) \mid x-G(X)$, il suffit d'établir que

$$v_{E'}R(y') \geq \Psi_{E'/F}(e)+1 \quad .$$

On a $\Psi_{E''/F} = \Psi_{E''/E'} \circ \Psi_{E'/F}$. Posons $e' = \Psi_{E'/F}(e)$. L'extension E'' de E' vérifie $C^{e'}$ et il s'agit de vérifier que

$$v_{E''}(y'-y) \geq \Psi_{E''/E'}(e')+1 \Rightarrow v_{E'}R(y') \geq e'+1 \ .$$

Cela résulte de A.6.4, appliqué aux extensions E'', E''' de E' .

Prouvons 2.5 dans le cas général. Remplaçant X' par son extension étale de corps résiduel le corps résiduel de X'' , on se ramène à supposer que X' et X'' ont même corps résiduel k' (utiliser 2.3 remarque (ii)). Remplaçant S par son extension étale d'extension résiduelle k' (nouvelle application de 2.3 remarque (ii)), on se ramène au cas totalement ramifié déjà traité.

Définition 2.7. Soit $S = (R,M,\varepsilon)$ avec $\lg R = e$. La catégorie $(\mathrm{ext}\ S)^e$ est la catégorie d'objets les objets de $(\mathrm{ext}\ S)$ vérifiant C^e , un morphisme de X dans Y étant une $R(\psi_{X/S}(e))$-classe d'équivalence de $(\mathrm{ext}\ S)$-morphismes de X dans Y . La composition des morphismes est obtenue par passage au quotient à partir de la composition des morphismes dans $(\mathrm{ext}\ S)$.

Les lemmes 2.4 et 2.5 garantissent que la définition donnée de la composition des morphismes a un sens. On dispose d'un foncteur de passage au quotient

(sous-catégorie pleine de $(\mathrm{ext}\ S)$ formée des objets vérifiant C^e) $\to (\mathrm{ext}\ S)^e$.

Pour $S = \mathrm{Tr}_e(F)$, le composant avec la restriction de T_o à $(\mathrm{ext}\ F)^e$, on obtient un foncteur

$$T : (\mathrm{ext}\ F)^e \longrightarrow (\mathrm{ext}\ \mathrm{Tr}_e F)^e \quad .$$

Le lemme 2.3.1 et 2.1.1 (iii) pour $f = e$ fournissent notre théorème principal :

Théorème 2.8. Le foncteur $T : (\mathrm{ext}\ F)^e \longrightarrow (\mathrm{ext}\ \mathrm{Tr}_e F)^e$ est une équivalence de catégories.

Voici quelques corollaires immédiats.

Corollaire 2.9. Soient $S = (R,M,\varepsilon)$ dans $\mathcal{T}$, avec $\lg(R) = e$, f un entier, $1 \leq f \leq e$, et $\overline{S}$ la réduction de S mod m^f (1.4.2). Le foncteur qui à S'/S, d'indice de ramification r, associe sa réduction mod $m_{S'}^{rf}$ induit une équivalence

$$(\text{objets de } (\text{ext } S)^e, \text{ vérifiant } C^f) \longrightarrow (\text{ext } \overline{S})^f \ .$$

Preuve . On écrit $S = Tr_e(F)$. Le foncteur T induit une équivalence

$$(\text{ext } F)^f \longrightarrow (\text{objets de } (\text{ext } Tr_e F)^e \text{ vérifiant } C^f) \ ,$$

et 2.9 est le composé de son inverse avec l'équivalence 2.8 pour $(\text{ext } F)^f$:

$$(\text{ext } F)^f \longrightarrow (\text{ext } \overline{S})^f \ .$$

Remarque . Utilisant que, dans (2.3.1), on ne suppose pas que le but E'' vérifie C^e, on peut renforcer 2.9 comme suit :

(a) Tout $\overline{S}'/\overline{S}$ dans $(\text{ext } \overline{S})$ est la réduction d'un S'/S dans $(\text{ext } S)$. Si $\overline{S}'$ vérifie C^f, S' aussi (utiliser 2.1.1 (i) et (iii)).

(b) Soient S' et S'' dans $(\text{ext } S)$, de réduction $\overline{S}'$ et $\overline{S}''$. Si S' vérifie C^f, on a

$$\mathrm{Hom}_{\text{ext } S}(S',S'') \bmod R(\psi_{S'/S}(e)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\text{ext } \overline{S}}(\overline{S}'/\overline{S}'') \bmod R(\psi_{S'/S}(f)) \ .$$

2.10. Soit E dans $(\text{ext } F)$ vérifiant C^e . Pour qu'une extension E' de E vérifie C^e (sur F), il faut et il suffit qu'en tant qu'extension de E elle vérifie $C^{\psi_{E/F}(e)}$:

$$(\text{ext } \underline{F})^{\psi_{E/F}(e)} \xrightarrow{\sim} (\text{ext } F)^e/E \ .$$

Traduisant par 2.8, on obtient le

Corollaire 2.10.1. Soient $S = (R,M,\varepsilon)$ dans $\mathcal{T}$, avec $\lg R = e$, et T dans $(\text{ext } S)$ vérifiant C^e, d'indice de ramification r sur S . Le foncteur évident est une équivalence

$$(\text{objets de } (\text{ext } T)^{re} \text{ vérifiant } C^{\psi_{T/S}(e)}) \longrightarrow (\text{ext } S)^e/T \ .$$

Soient T' et T'' dans $(\text{ext } T)$, T' et T'' vérifiant la condition $C^{\psi_{T/S}(e)}$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] & T \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "v"'] & T' \\ & & T'' \end{tikzcd}$$

Le corollaire signifie qu'on a une bijection :

(classes mod $R(\Psi_{T'/T}(re))$ de T-morphismes de T' dans T'') $\xrightarrow{\sim}$

(classes mod$R(\Psi_{T'/S}(e))$ de S-morphismes f de T' dans T'', tels que $fu \equiv v \mod R(\Psi_{T/S}(e))$).

Prenons $T' = T''$, $u \equiv v \mod R(\Psi_{T/S}(e))$ et $f = Id$. On trouve qu'il existe un automorphisme a de T' avec $a \equiv Id \mod R(\Psi_{T'/S}(e))$ tel que $au = v$:

Corollaire 2.10.2. Soient T et T' dans (ext S), vérifiant C^e et $u,v : T \longrightarrow T'$ deux S-morphismes. Pour que $u \equiv v \mod R(\Psi_{T/S}(e))$, il faut et il suffit qu'il existe un S-automorphisme a de T', $a \equiv Id \mod R(\Psi_{T'/S}(e))$, tel que $au = v$.

La suffisance est cas particulier de 2.5.

3. COMPATIBILITES

3.1. Soit $S = (R,M,\varepsilon)$ dans $\mathcal{T}$, avec $\lg R = e$. La définition donnée de la catégorie $(\text{ext } S)^e$ a ceci de désagréable, que les flèches sont définies comme des classes d'équivalences de "vraies flèches" (dans (ext S)). Divers objets attachés à T dans $(\text{ext } S)^e$ sont toutefois définis à isomorphisme unique près, et fonctoriels en T.

Pour $T = (A,I,\varepsilon)$ dans (ext S), vérifiant C^e, soient m_T l'idéal maximal de A et posons

$$T_1 := \text{réduction de } T \bmod m_T^{\Psi_{T/S}(e)} \qquad (1.4.2).$$

Rappelons que $\Psi_{T/S}(e)$ est un entier (A.5.4). Pour tout morphisme $u : T' \longrightarrow T''$ entre objets vérifiant C^e, d'indice de ramification s, on a $\Psi_{T''/S}(e) = \Psi_{T''/T'}\Psi_{T'/S}(e) \leq s\Psi_{T'/S}(e)$ et u induit un morphisme dans

$T/S : T_1' \longrightarrow T_1''$. Si $u \equiv v \mod R(\Psi_{T'/S}(e))$, les morphismes de T_1' dans T_1'' déduit de u et v coïncident. Par passage au quotient, on obtient un foncteur

(3.1.1) $$T \longmapsto T_1 : (\mathrm{ext}\ S)^e \longrightarrow T/S .$$

Proposition 3.2. Soient T et T'' dans $(\mathrm{ext}\ S)$, vérifiant C^e, et $f : T' \longrightarrow T''$.

(i) Le morphisme norme 4.3 induit un morphisme norme $N : T_1''^* \longrightarrow T_1'^*$.

(ii) Ce morphisme ne dépend que de la $R(\Psi_{T'/S}(e))$-classe d'équivalence de f.

Pour (i), remplaçant S par T' et e par $\Psi_{T'/S}(e)$, on se ramène à supposer que $S = T'$. Posons $T = T''$. On peut supposer que, pour une extension convenable E/F, d'indice de ramification r, on a $S = Tr_e(F)$ et $T = Tr_{re}(E)$. Le morphisme norme 1.6 est alors induit par $N_{E/F} : E^* \longrightarrow F^*$. Notons U^n le groupe des unités congrues à 1 modulo la puissance n-ième de l'idéal maximal. Il reste à utiliser que $N_{E/F}$ envoie $U^{\Psi_{E/F}(e)}(E)$ dans $U^e(F)$.

Prouvons (ii). Par 2.10.2 et la transitivité des normes, il suffit d'observer qu'un automorphisme a de T'', d'image l'automorphisme identique de T'' dans $(\mathrm{ext}\ S)^e$, induit l'automorphisme identique de T_1''.

La proposition 3.2 permet d'attacher à chaque morphisme $f : T' \longrightarrow T''$ dans $(\mathrm{ext}\ S)^e$ un morphisme norme

(3.2.1) $$N : (T_1'')^* \longrightarrow (T_1')^* .$$

Pour les traces, on a de même

Proposition 3.3. Soient T' et T'' dans $(\mathrm{ext}\ S)$ vérifiant C^e et $f : T' \longrightarrow T''$. Posons $T_1' = (A_1', I_1', \varepsilon)$ et $T_1'' = (A_1'', I_1'', \varepsilon)$. Le morphisme trace 1.7 induit un morphisme trace : $Tr : I_1'' \longrightarrow I_1'$. Il ne dépend que de la $R(\Psi_{T'/S}(e))$-classe d'équivalence de f.

On raisonne comme en 3.2, en utilisant que $Tr_{E/F}$ envoie $m_E^{\Psi_{E/F}(e)+1}$ dans (en fait sur) m_F^{e+1}.

La proposition permet d'attacher à chaque morphisme $f : T' \longrightarrow T''$ dans $(\mathrm{ext}\ S)^e$ un morphisme trace

(3.3.1) $\qquad \mathrm{Tr} : I_1'' \longrightarrow I_1'$.

3.4. Soient F' et F'' deux corps locaux, e un entier ≥ 1 , et u un isomorphisme $\mathrm{Tr}_e(F') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_e(F'')$. On l'utilise pour identifier $\mathrm{Tr}_e(F')$ et $\mathrm{Tr}_e(F'')$ à un même triple $S = (R,M,\varepsilon)$. D'après le théorème, u fournit une équivalence de catégories

$$U : (\mathrm{ext}\ F')^e \xrightarrow{\sim} (\mathrm{ext}\ F'')^e \ .$$

Construction 3.4.1. Soient E' une extension de F' vérifiant $C^e_{F'}$, et E'' l'extension de F'' qui lui correspond par U. Elles ont même indice de ramification r et $\Psi_{E'/F'} = \Psi_{E''/F''}$. Soit $e(1) = \Psi_{E'/F'}(e) = r(e+1)-$(valuation de la différente)-1 (A.5.4) ; c'est un entier. On construit un isomorphisme canonique

$$u : \mathrm{Tr}_{e(1)}(E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tr}_{e(1)}(E'') \ .$$

Par définition, on dispose d'un isomorphisme canonique, dans $(\mathrm{ext}\ S)^e$, entre $T(E')$ et $T(E'')$, i.e. d'une classe mod $R(e(1))$ d'isomorphismes entre $\mathrm{Tr}_{re}(E') = T_o(E')$ et $\mathrm{Tr}_{re}(E'') = T_o(E'')$. Ces isomorphismes induisent tous le même isomorphisme entre les quotients $\mathrm{Tr}_{e(1)}(E')$ et $\mathrm{Tr}_{e(1)}(E'')$ de $\mathrm{Tr}_{re}(E')$ et $\mathrm{Tr}_{re}(E'')$. C'est l'isomorphisme voulu.

3.4.2. On a $e \leq e(1) \leq re$, avec $e(1) = re$ si et seulement si l'extension E'/F' est modérément ramifiée. Si $e(1) < re$, on peut préciser $\tilde{u}$ en un isomorphisme canonique de R-algèbres

(3.4.2.1) $\qquad \mathcal{O}'/\mathfrak{m}'^{e(1)+1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}''/\mathfrak{m}''^{e(1)+1}$.

Il s'agit de vérifier que deux isomorphismes $f_1,f_2 : \mathrm{Tr}_{re}(E') \to \mathrm{Tr}_{re}(E'')$ $R(e(1))$-équivalents induisent le même isomorphisme (3.4.2.1). Si R_o est l'anneau des entiers de l'extension étale de R de corps résiduel celui de E' et E'' , on a

$$R_o \subset \mathcal{O}'/\mathfrak{m}'^{re} \ , \ \mathcal{O}''/\mathfrak{m}''^{re} \ ,$$

et chaque isomorphisme f_i induit l'identité de R_o : on a $f_1 | R_o = f_2 | R_o$. Pour x dans l'idéal maximal, image de x_1 dans $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^{re+1}$, on a

$$v(f_1(x)-f_2(x)) \geq v(f_1(x_1)-f_2(x_1)) \geq e(1)+1 \ .$$

Au total, f_1 et f_2 vérifient $v(f_1-f_2) \geq e(1)+1$, donc induisent le même morphisme (3.4.2.1).

L'isomorphisme 3.4.1 obéit aux fonctorialités suivantes.

3.4.3. Soient $v : E'_1 \longrightarrow E'_2$ un morphisme entre extensions de F' , dans $(\text{ext } F')^e$, et $E''_1 \longrightarrow E''_2$ son image par U . Posons $e(i) = \Psi_{E'_i/F'_i}(e) = \Psi_{E''_i/F'_i}(e)$. Si r est l'indice de ramification de E'_2/E'_1 , on a $e(2) \leq re(1)$, d'où des flèches déduites de 1.4.1 : $Tr_{e(1)}E'_1 \longrightarrow Tr_{e(2)}E'_2$. De même pour E''_i . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Tr_{e(1)}(E') & \longrightarrow & Tr_{e(1)}(E'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ Tr_{e(2)}(E') & \longrightarrow & Tr_{e(2)}(E'') \end{array}$$

est commutatif. Un résultat analogue vaut pour les flèches 3.4.2, dans la mesure où cela a un sens.

3.4.4. L'isomorphisme canonique $\tilde{u}$ de 3.4.1 induit un isomorphisme

$$E'^*/U^{e(1)} \simeq Tr_{e(1)}(F')^* \xrightarrow{\sim} Tr_{e(1)}(E'')^* = E''^*/U^{e(1)} \quad .$$

Avec les notations (a), la norme N envoie $U^{e(2)}(E'_2)$ dans $U^{e(1)}(E'_1)$, de même pour E''_2/E''_1 , et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E'^*_2/U^{e(2)} & \xrightarrow{\sim} & E''^*_2/U^{e(2)} \\ {\scriptstyle N}\downarrow & & \downarrow \\ E'^*_1/U^{e(1)} & \xrightarrow{\sim} & E''^*_1/U^{e(1)} \end{array}$$

est commutatif.

3.4.5. Notons m , affecté d'indices et de ' ou " l'idéal maximal de l'anneau de la valuation de E , affecté de même. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} m'_2/m'^{e(2)+1}_2 & \xrightarrow{\sim} & m''_2/m''^{e(2)+1}_2 \\ \downarrow {\scriptstyle Tr_{E'_2/E'_1}} & & \downarrow {\scriptstyle Tr_{E''_2/E''_1}} \\ m'_1/m'^{e(1)+1}_1 & \xrightarrow{\sim} & m''_1/m''^{e(1)+1}_1 \end{array}$$

est commutatif.

Les assertions 3.4.4 et 3.4.5 résultent respectivement de 1.6 et 1.7, et des définitions.

3.5. L'équivalence de catégories U induit un isomorphisme - unique à automorphisme intérieur près -

(3.5.1) $\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e \simeq \mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')/\mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')^e$,

pour $\overline{F}'$ (resp. $\overline{F}''$) une clôture séparable de F' (resp. F'').

En effet

(a) Il s'étend en une équivalence de la catégorie des Ind-objets de $(\mathrm{ext}\ F')^e$ avec celle des ind-objets de $(\mathrm{ext}\ F'')^e$. Ces catégories de Ind-objets s'interprètent, concrètement, comme celles des extensions algébriques de F' (resp. F'') dont toutes les sous-extensions finies sont dans $(\mathrm{ext}\ F')^e$ (resp. $(\mathrm{ext}\ F'')^e$) .

(b) Il y a dans $\mathrm{Ind}(\mathrm{ext}\ F')^e$ un objet Ω' , unique à isomorphisme (non unique) près, tel que pour tout E' dans $(\mathrm{ext}\ F')^e$, $\mathrm{Hom}(E',\Omega') \neq \emptyset$. Si $\overline{F}'$ est une clôture séparable de F' , on peut prendre

$$\Omega' = \text{invariants de } \mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e \text{ dans } \overline{F}' .$$

(c) On a $\mathrm{Aut}\ \Omega' = \mathrm{Gal}(\overline{F}'/F)/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e$, et 3.5.1 est

$$U : \mathrm{Aut}\ \Omega' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(U\Omega') ,$$

la non-unicité venant de ce que Ω' n'est unique qu'à isomorphisme non unique près.

Par passage aux groupes rendus abéliens, (3.5.1) fournit un isomorphisme canonique

(3.5.2) $(\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e)^{ab} \simeq (\mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')/\mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')^e)^{ab}$.

Noter que les groupes (3.5.2) sont indépendants, à isomorphisme unique près, des choix de $\overline{F}'$ et $\overline{F}''$.

3.6. Supposons F' et F'' à corps résiduels finis. Le corps de classe fournit alors un isomorphisme canonique

$$(\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e)^{ab} \simeq (F'^*/U^e(F'))^\wedge$$

($\wedge$ pour "complété profini").

<u>Proposition</u> 3.6.1. <u>Le diagramme</u>

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^{e})^{ab} & \underset{U}{\simeq} & (\mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')/\mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')^{e})^{ab} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
(F'^{*}/U^{e})^{\wedge} \simeq (\mathrm{Tr}_{e}F')^{*\wedge} & \underset{u}{\simeq} & \mathrm{Tr}_{e}(F'')^{*\wedge} \simeq (F''^{*}/U^{e})^{*\wedge}
\end{array}$$

<u>est commutatif</u>.

L'isomorphisme de la théorie du corps de classe est la limite projective, sur les extensions abéliennes finies $E \subset \overline{F}'$ de F', des isomorphismes de réciprocité

$$\mathrm{Gal}(E/F') \longleftrightarrow F'^{*}/NE^{*} \quad .$$

Il suffit de montrer que pour chaque extension abélienne E' de F' vérifiant $C^{e}_{F'}$, correspondant à une extension abélienne E'' de F'', le diagramme en traits pleins

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(E'/F') \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{Gal}(E''/F'') \arrow[d, leftrightarrow] \\
F'^{*}/NE'^{*} \arrow[r, dashed, leftrightarrow] & F''^{*}/NE''^{*} \\
\mathrm{Tr}_{e}(F')^{*} \arrow[r, dash, "\sim"] \arrow[u] & (\mathrm{Tr}_{e}(F''))^{*} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

peut se compléter en un diagramme commutatif comme indiqué. Nous le vérifierons à l'aide de la description de l'isomorphisme de réciprocité fournie par le théorème de Dwork ([6] XIII § 5).

Pour une extension abélienne non nécessairement totalement ramifiée E/F, cette description est la suivante. Soient k le corps résiduel de F, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et F_{nr} le complété de l'extension non ramifiée maximale de F de corps résiduel $\overline{k}$ (extension du corps résiduel de k à $\overline{k}$). Soient $q := \# k$, φ le F-automorphisme de F_{nr} induisant sur $\overline{k}$ l'automorphisme $x \longmapsto x^{q}$ et Fr l'inverse de φ. C'est le "Frobenius géométrique". Posons $E_{nr} = E \otimes_F F_{nr}$. C'est un produit de corps E_i indexé par les k-plongements dans $\bar{k}$ du corps résiduel de E. On note encore Fr l'automorphisme $x \otimes y \longmapsto x \otimes Fr(y)$ de E_{nr}, et on fait agir $Gal(E/F)$ sur E_{nr} par $s(x \otimes y) = s(x) \otimes y$. Ces actions commutent.

Soit $v_i : E_i^* \to \mathbb{Z}$ la valuation de E_i et $v : E_{nr}^* = \prod E_i^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ la somme des v_i. La suite

$$0 \longrightarrow E^* \longrightarrow E_{nr}^* \xrightarrow{Fr(x)/x} E_{nr}^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

est exacte, et les trois premiers termes de la suite exacte analogue pour F s'en déduisent par passage aux invariants sous $Gal(E/F)$: on dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes, de flèches verticales (sauf la dernière) des morphismes norme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E^* \arrow[r] \arrow[d] & E_{nr}^* \arrow[r] \arrow[d] & E_{nr}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^* \arrow[r] & F_{nr}^* \arrow[r] & F_{nr}^* \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit $\pi \in E_{nr}^*$ tel que $v(\pi) = 1$. Quel que soit $s \in Gal(E/F)$, on a $v(\pi^{s-1}) = v(\pi^s) - v(\pi) = 0$ et il existe $y \in E_{nr}^*$ tel que $\pi^{s-1} = y^{Fr-1}$. On a $Ny \in F^* \subset F_{nr}^*$ (norme de E_{nr}^* à F_{nr}^*). En effet, $(Ny)^{Fr-1} = N(y^{Fr-1}) = N(\pi^{s-1}) = 1$. Puisque y est unique $\bmod^* E^*$, la classe de $N(y)$ mod $N_{E/F}(E^*)$ est indépendante du choix de y. Elle est aussi indépendante du choix de π : si $\pi' = \pi x$ avec $v(x) = 0$, donc $x = z^{Fr-1}$, on a $\pi'^{s-1} = (y \cdot z^{s-1})^{Fr-1}$ et $N(y \cdot z^{s-1}) = N(y) \cdot N(z^{s-1}) = N(y)$. On a : par l'application de réciprocité, s correspond à la classe $\bmod^* N_{E/F}(E^*)$ de Ny^{-1}. Pour la preuve, voir [6] XIII § 5, et exercice 2. Noter deux changements de signe par rapport à [6] : nous utilisons le Frobenius <u>géométrique</u>, et nous normalisons l'isomorphisme du corps de classe de sorte qu'il transforme Frobenius géométriques en uniformisantes.

Posons $e' = \Psi_{E/F}(e)$. La description ci-dessus de l'image de s par l'application de réciprocité dans le quotient F^*/NE^* de $F^*/U^e(F)$ ne dépend que de (a) les $E_i^*/U^{e'}(E_i)$, pour $E_{nr} = \prod E_i$. On pose $U^{e'}(E_{nr}) = \prod U^{e'}(E_i)$. (b) Le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E^*/U^{e'}(E) \arrow[r] \arrow[d] & E_{nr}^*/U^{e'}(E_{nr}) \arrow[r] \arrow[d] & E_{nr}^*/U^{e'}(E_{nr}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^*/U^e(F) \arrow[r] & F_{nr}^*/U^e(F_{nr}) \arrow[r] & F_{nr}^*/U^e(F_{nr}) \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de flèches verticales induites par la norme ; (c) l'automorphisme induit par s de $E^*_{nr}/U^{e'}(E_{nr})$. Il s'agit de reconstituer ces données à partir de $S = Tr_e(F')$, de T/S dans $(\mathrm{ext}\ S)^e$ correspondant à E et de l'automorphisme s de T . Soient k le corps résiduel de S , k_T celui de T , $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et I l'ensemble des k-plongements de k_T dans $\bar{k}$. Soient S_{nr} déduit de S par extension du corps résiduel à $\bar{k}$ et pour $i \in I$, soit de même T_i déduit de T par l'extension de corps résiduel $i : k_T \hookrightarrow \bar{k}$. Les $E_i^*/U^{e'}(E_i)$ sont les T^*_{i1} . Le diagramme commutatif (b) est

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & T_1^* & \longrightarrow & \prod T_{o1}^* & \longrightarrow & \prod T_{i1}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow N & & \downarrow \prod N & & \downarrow \prod N & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & S^* & \longrightarrow & S^*_{nr} & \longrightarrow & S^*_{nr} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

et l'automorphisme s de T dans $(\mathrm{ext}\ S)^e$ fournit dans $(\mathrm{ext}\ S_{nr})^e$ des isomorphismes $s : T_i \longrightarrow T_{s(i)}$, et finalement l'automorphisme $\prod T^*_{i1} \longrightarrow \prod T^*_{i1}$ voulu (c). Ceci termine la preuve de 3.6.1.

3.7. Soient comme en 3.4 F' , F'' et $u : Tr_e(F') \xrightarrow{\sim} Tr_e(F'')$. L'équivalence de catégorie U fournit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\bar{F}'/F')/\mathrm{Gal}^e \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\bar{F}''/F'')/\mathrm{Gal}^e$, bien défini à isomorphisme intérieur près, d'où une bijection naturelle de l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations complexes (continues, de dimension finie) de $\mathrm{Gal}(\bar{F}'/F')$, triviales sur $\mathrm{Gal}(\bar{F}'/F')^e$, avec l'ensemble analogue pour F'' .

Supposons F' et F'' à corps résiduel fini. On peut alors ci-dessus remplacer les groupes de Galois par les groupes de Weil. Nous dirons que deux caractères additifs $\psi' : F' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et $\psi'' : F'' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ se correspondent, si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a) $n(\psi') = n(\psi'')$. Rappelons que $n(\psi')$ est le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que ψ' soit trivial sur l'idéal fractionnaire m'^{-n} puissance $(-n)$-ième de l'idéal maximal de l'anneau de la valuation de F' . Posons $n = n(\psi') = n(\psi'')$.

(b) L'isomorphisme u identifie $\psi'|(m'^{-n-e}/m'^{-n})$ à $\psi''|(m''^{-n-e}/m''^{-n})$, via l'isomorphisme

$$m'^{-n-e}/m'^{-n} \simeq (m'/m'^{e+1})^{\otimes(-n-e)} \simeq (m''/m''^{e+1})^{\otimes(-n-e)} \simeq m''^{-n-e}/m''^{-n} \quad .$$

On munit F et F'' de mesures de Haar dx pour lesquelles les anneaux de valuation de F' et F'' ont même volume.

Proposition 3.7.1. Avec les notations ci-dessus, si une représentation V' de $\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')$, triviale sur $\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e$, correspond à une, V'', de $\mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')$, et que Ψ' correspond à Ψ'', on a

$$\varepsilon(V',\Psi',dx) = \varepsilon(V'',\Psi'',dx) \quad . \tag{3.7.1.1}$$

Il s'agit de la constante locale ε de l'équation fonctionnelle des fonctions L, telle que définie dans [2] .

Supposons d'abord V' et V'' de dimension 1 correspondant à des caractères χ' et χ'' de F'^* et F''^*. Par hypothèse, ils se factorisent respectivement par F'^*/U^eF' et F''^*/U^eF''. Par 3.6.1, χ' et χ'' se correspondent par l'isomorphisme induit par u

$$F'^*/U^eF' \simeq (\mathrm{Tr}_e F')^* \simeq (\mathrm{Tr}_e F'')^* \simeq F''^*/U^eF'' \quad .$$

En dimension quelconque, les caractères de F'^* et F''^* associés aux puissances extérieures maximales $\det V'$ et $\det V''$ de V' et V'' se correspondent de même. De là, et des formules

$$\varepsilon(V,\Psi,a\cdot dx) = a^{\dim V}\,\varepsilon(V,\Psi,dx)$$

$$\varepsilon(V,\Psi(\lambda x),dx) = \det V(\lambda)\,\|\lambda\|^{-\dim V}\varepsilon(V,\Psi,dx)$$

on déduit que la validité de (3.7.1.1) ne dépend pas du choix de dx, ni de celui de Ψ', Ψ'' qui se correspondent.

Revenons à la dimension 1 . Si χ', donc χ'', est non ramifié, que dx donne le volume 1 à l'anneau de la valuation et que $n(\Psi') = n(\Psi'')=0$, on a $\varepsilon = 1$ et (3.7.1.1) est vrai. Supposons χ' ramifié, de conducteur $e(1) \leq e$. Choisissons Ψ' tel que $n(\Psi') = -e(1)$ et dx donnant le volume 1 à $m'^{e(1)}$. La constante $\varepsilon(\chi',\Psi',dx)$ est alors la somme sur $(\mathcal{O}'/m'^{e(1)})^*$

$$\sum \chi(x)^{-1}\Psi(x) \quad ,$$

et la même somme donne $\varepsilon(\chi'',\Psi'',dx)$. Ceci prouve (3.7.1.1) en dimension 1.

Soient $\overline{F}'$ une clôture séparable de F' , $\overline{F}'_e$ le sous-corps de $\overline{F}'$ fixe par $\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e$, $E' \subset \overline{F}'$ une extension de F' dans $(\mathrm{ext}\ F')^e$, i.e. contenue dans $\overline{F}'_e$, $e(1) = \Psi_{E'/F'}(e)$ et W' une représentation virtuelle de dimension 0 de $\mathrm{Gal}(\overline{F}'_e/E') = \mathrm{Gal}(\overline{F}'/E')/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/E')^{e(1)} = \mathrm{Gal}(\overline{F}'/E')/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/E') \cap \mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e$, et V' la représentation virtuelle de $\mathrm{Gal}(\overline{F}'_e/F')$ induite. Soient E'', W'' et V'' correspondant à E' , W' et V'. On dispose d'un isomorphisme $u_1 : \mathrm{Tr}_{e(1)}E' \simeq \mathrm{Tr}_{e(1)}E''$ et W' correspond à W'' rel. cet isomorphisme.

Lemme 3.7.2. Si des caractères additifs Ψ' et Ψ'' de F' et F'' se correspondent (rel. u), les caractères $\Psi'\circ\mathrm{Tr}_{E'/F'}$ et $\Psi''\circ\mathrm{Tr}_{E''/F''}$ se correspondent (rel. u_1).

Posons $(R,M,\varepsilon) := \mathrm{Tr}_e(F')$ et $(A_1,I_1,\varepsilon) = (\mathrm{Tr}_{re}(E'))_1$. On peut supposer que $n(\Psi') = n(\Psi'') = -(e+1)$. Dans ce cas, Ψ' ne nous importe que par sa restriction à $M = m_{F'}/m_{F'}^{e+1}$. On a $n(\Psi'\circ\mathrm{Tr}_{E'/F'}) = rn(\Psi')$ -(valuation de la différente) $= -(\Psi_{E'/F'}(e)+1)$: le caractère $\Psi'\circ\mathrm{Tr}_{E'/F'}$ ne nous importe que par sa restriction à $I_1 = m_{E'}/m_{E'}^{e(1)+1}$. Celle-ci est donnée par

$$(\Psi'|\ M)\circ(\text{trace } 3.4.4).$$

De même pour Ψ'' , et 3.7.2 en résulte.

On a

$$\varepsilon(V',\Psi') = \varepsilon(W',\Psi'\circ\mathrm{Tr}_{E'/F'})$$

(ces ε sont indépendants de dx) , et de même avec ' remplacé par ". De $\varepsilon(W',\Psi'\circ\mathrm{Tr}_{E'/F'}) = \varepsilon(W'',\Psi''\circ\mathrm{Tr}_{E''/F''})$, on peut donc conclure que $\varepsilon(V',\Psi') = \varepsilon(V'',\Psi'')$. D'après 3.7.2, et le cas de dimension 1, déjà traité, tel est le cas si W' est somme algébrique de représentations de dimension 1. On conclut en utilisant que, dans le groupe de Grothendieck $R(G)$ des représentations virtuelles d'un groupe fini G , tout élément x est une combinaison linéaire

$$x = n\cdot 1 + \Sigma\ n_i\ \mathrm{Ind}_{H_i}^{G}(\chi_i - 1) \quad ,$$

avec χ_i une représentation de dimension 1 de $H_i \subset G$.

Remarque 3.7.3. L'énoncé de comparaison 3.7.1 vaut aussi pour les facteurs L .

3.8. Si F' et F" sont à corps résiduel algébriquement clos, le corps de classe géométrique [7] fournit un isomorphisme

$$(\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e)^{ab} \simeq \pi_1(\mathcal{O}_{F'}^*/U^e(F')) \ .$$

Un isomorphisme u comme en 3.4. fournit un isomorphisme de groupes pro-algébriques de $\mathcal{O}_{F'}^*/U^e(F')$ avec $\mathcal{O}_{F''}^*/U^e(F'')$. On a

Proposition 3.8.1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
(\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')/\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')^e)^{ab} & \underset{U}{\simeq} & (\mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')/\mathrm{Gal}(\overline{F}''/F'')^e)^{ab} \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
\pi_1(\mathcal{O}_{F'}^*/U^e(F')) & \underset{u}{\simeq} & \pi_1(\mathcal{O}_{F''}^*/U^e(F''))
\end{array}$$

est commutatif

On procède comme pour 3.6.1, en utilisant la description de l'isomorphisme de réciprocité [7] remarque p. 119.

APPENDICE. THEORIE DE LA RAMIFICATION ET FONCTIONS DE HERBRAND, POUR DES EXTENSIONS NON GALOISIENNES

La théorie des fonctions φ et Ψ de Herbrand, telle qu'exposée par J.P. Serre dans [6] IV, s'étend sans difficulté au cas d'extensions séparables non nécessairement galoisiennes E/F . Faute d'avoir trouvé une référence commode dans la littérature, nous expliquons ici cette extension.

(A.1) Soient F un corps complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait, et E une extension finie séparable de F . Si E est galoisienne sur F , de groupe de Galois G , J.P. Serre définit les groupes de ramification G_n par

(A.1.1) $\sigma \in G_n :\Longleftrightarrow \forall x \in \mathcal{O}_E \ (\sigma(x) \equiv x \mod m_E^{n+1})$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in m_E - m_E^2 \quad (\sigma(x)/x \equiv 1 \mod m_E^n) \quad .$$

C'est la <u>numérotation inférieure</u>. Prendre garde que dans cette numérotation le groupe d'inertie est G_o, alors que c'est G_1 dans celle de Zariski-Samuel vol I chapitre V § 10. Pour u réel ≥ -1, il pose

$$G_u := G_n \quad \text{pour } n \text{ le plus petit entier} \geq u \ ,$$

et définit la fonction de Herbrand $\varphi_{E/F}$ ou simplement φ par

(A.1.2) $$\varphi(u) = \int_o^u dt/[G_o:G_t] \quad .$$

On convient que $\varphi(u) = u$ pour $-1 \leq u \leq 0$. Pour $H \subset G$ un sous-groupe invariant et $E' = E^H$ la sous-extension galoisienne correspondante de E, de groupe de Galois G/H, on prouve la transitivité

(A.1.3) $$\varphi_{E/F} = \varphi_{E'/F} \circ \varphi_{E/E'}$$

et le théorème de Herbrand

(A.1.4) $$(G/H)_v = (G_u H)/H \qquad \text{pour } v = \varphi_{E/E'}(u) \quad .$$

(A.2) Avant de donner la généralisation de ces faits aux extensions non nécessairement galoisienne, deux remarques qui simplifieront les notations.

a. Pour E' et E'' deux extensions de F, d'indice de ramification r' et r'', nous noterons $v_{E'}$, le multiple $\frac{r'}{r''} v_{E''}$ de la valuation $v_{E''}$ de E'' normalisée pour que son groupe des valeurs soit $\mathbb{Z}$. Pour tout plongement $\iota : E'' \longrightarrow E'''$, on a $v_{E'}(\iota x) = v_{E'}(x)$.

b. Rappelons la remarque de Serre [6] § 3 p. 83, élaborée dans [1] 3.1. A chaque extension finie séparable E de F, de groupe des ordres $\Gamma_E := E^*/\mathcal{O}_E^* \xrightarrow[v_E]{\sim} \mathbb{Z}$, attachons la demi-droite $T_E : t \geq -1$ de $\Gamma_E \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$. Pour E' une extension galoisienne de E'', on regarde la fonction de Herbrand $\varphi_{E'/E''}$ comme un isomorphisme $T_{E'} \xrightarrow{\sim} T_{E''}$. On déduit de (A.1.2) que ces isomorphismes engendrent un système transitif d'isomorphismes entre les T_E. Soit T la limite projective des T_E. On note v_E l'application composée $T \xrightarrow{\sim} T_E \hookrightarrow \Gamma_E \otimes \mathbb{R} \xrightarrow[v_E]{\sim} \mathbb{R}$.

(A.3) Soit E une extension finie séparable de F . Soit M une extension galoisienne finie de F , assez grande pour que E s'y plonge. Le groupe de Galois utilisé en (A.1) est à remplacer par l'ensemble G des plongements de E dans M . C'est un espace homogène sous $\mathrm{Gal}(M/F)$. La filtration par les G_u est à remplacer par la donnée de relations d'équivalence $R(t)$ sur G $(t \in T)$, de plus en plus fine pour $t \to \infty$. Notant $v_E(\sigma-\tau)$ la borne inférieure des $v_E(\sigma(x)-\tau(x))$ pour $x \in \mathcal{O}_E$, on les définit par

$$\text{(A.3.1)} \quad \sigma \equiv \tau \ (R(t)) \ :\Longleftrightarrow v_E(\sigma-\tau) \geq v_E(t)+1 \quad .$$

Noter que G , muni des $R(t)$, ne change pas quand M est remplacé par $M' \supset M$. Cette remarque permettrait de remplacer le choix de M par celui d'une clôture séparable de F . On définit des numérotations supérieures et inférieures par

$$\text{(A.3.2)} \qquad R(t) = R^{v_F(t)} = R_{v_E(t)} \quad .$$

En numérotation inférieure, on a simplement

$$\text{(A.3.3)} \ \sigma \equiv \tau \quad (R_u) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathcal{O}_E \ v_E(\sigma(x)-\tau(x)) \geq u+1 \quad .$$

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(M/F)$ agissant transitivement sur G et respectant les équivalences $R(t)$, le nombre $r(t)$ d'éléments dans une classe mod $R(t)$ est indépendant de la classe choisie. On pose

$$\text{(A.3.4)} \qquad r(t) = r^{v_F(t)} = r_{v_E(t)} \quad .$$

Soit x un générateur de $\mathcal{O}_E$ sur $\mathcal{O}_F$. D'après [6] III 6 prop.12, il en existe. Si $P(X) = X^d + \Sigma\, a_i X^i$ est son polynôme caractéristique - il coïncide avec son polynôme minimal - l'homomorphisme $X \longmapsto x : \mathcal{O}_F[X]/(P(X)) \longrightarrow \mathcal{O}_E$ est un isomorphisme et l'application $\sigma \mapsto \sigma(x)$ identifie donc G à l'ensemble des racines de P dans M . Pour $\sigma, \tau \in G$, on a

$$\text{(A.3.5)} \quad v_E(\sigma-\tau) = v_E(\sigma(x)-\tau(x)) \ .$$

Les entiers r_t peuvent dès lors se lire sur les valuations des racines du polynôme $P(X+x)$, à coefficient dans $\mathcal{O}_E$: une fois choisi un plongement σ_o de E dans M , les racines de ce polynôme dans l'extension M de E sont les $\sigma(x)-\sigma_o(x)$ $(\sigma \in G)$. Les valuations des racines de $P(X+x)$ peuvent se lire sur son polygone de Newton.

(A.4) Fixons un plongement σ_o de E dans M. La remarque (A.2)b conduit à définir la fonction de Herbrand $\varphi_{E/F}$ comme le composé

(A.4.1) $$\varphi_{E/F} := \varphi_{M/F} \circ \varphi_{M/E}^{-1} \quad .$$

Proposition A.4.2. La fonction (A.4.1) est donnée par la formule, parallèle à (A.1.2)

(A.4.3) $$\varphi(u) = \int_o^u dt/(r_o : r_t) \quad .$$

Preuve . Il suffit de montrer que les fonctions (A.4.3) obéissent à la transitivité (A.1.3). Le point essentiel est la généralisation suivante de [6] IV § 1 Prop. 3 p. 71. Soient $E \subset E'$, et M assez grand pour que E' s'y plonge. La restriction à E est alors une surjection de $G' := \mathrm{Hom}_F(E',M)$ sur $G := \mathrm{Hom}_F(E,M)$.

Proposition A.4.4. Pour $\sigma_o, \sigma_1 \in G$, pour τ_o un relèvement de σ_o et pour τ_1 parcourant les relèvements de σ_1 , on a

$$v_E(\sigma_o - \sigma_1) = \sum_{\tau_1 \to \sigma_1} v_E(\tau_o - \tau_1) \quad .$$

La preuve est parallèle à celle de [6]. On choisit des générateurs x et y de $\mathcal{O}_E$ et $\mathcal{O}_{E'}$ sur $\mathcal{O}_F$. Si Q est le polynôme minimal de y sur E , on a

$$\sigma Q = \prod_{\tau \to \sigma} (X - \tau y) \quad .$$

Prenant $\sigma = \sigma_1$, et substituant $X = \tau_o y$, on trouve

$$\prod_{\tau_1 \to \sigma_1} (\tau_o y - \tau_1 y) = (\sigma_1 Q)(\tau_o y) \equiv \sigma_o Q(\tau_o y) = 0 \quad (\mathrm{mod}\ \sigma_1 x - \sigma_o x) \quad .$$

Dans l'autre sens, on écrit $x = G(y)$, pour $G \in \mathcal{O}_F[X]$. Puisque y est racine de $x - G(X)$, on a $Q \mid x - G(X)$: $x - G(X) = Q(X) \cdot h(X)$. Appliquant σ_1 , et substituant $X = \tau_o y$, on trouve

$$\sigma_1 x - \sigma_o x = (\sigma_1 Q)(\tau_o y) . (\sigma_1 h)(\tau_o y) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod} (\sigma_1 Q)(\tau_o y) = \prod_{\tau_1 \to \sigma_1} (\tau_o y - \tau_1 y)).$$

Ces deux divisibilités prouvent l'assertion.

Ceci acquis, la transitivité des fonctions (A.4.3) se prouve comme dans [6] IV § 3 proposition 15 page 81. On prouve en même temps ([6] IV §3 lemme 5 page 82) que pour $E \subset E'$ comme en (A.4), la relation d'équivalence $R(t)$ sur G est le quotient de la relation d'équivalence $R(t)$ sur G'. En particulier, prenant $E' = M$, on trouve que $R(t)$ est l'équivalence : "être dans la même orbite de $\mathrm{Gal}(M/F)(t) = \mathrm{Gal}(M/F)_{v_M(t)} = \mathrm{Gal}(M/F)^{v_F(t)}$".

A.5. Soient E/F, M et $G := \mathrm{Hom}_F(E,M)$ comme en (A.3). Soit ℓ le plus grand nombre réel tel que l'équivalence R_ℓ soit non triviale. C'est la borne supérieure des $v_E(\sigma-\tau)-1$ pour $\sigma \neq \tau$ dans G. Pour $u \geq \ell$, la fonction $\varphi_{E/F}(u)$ est linéaire, de pente l'inverse de l'indice de ramification r de E/F. Par analogie avec (A.2)a., posons pour $\sigma,\tau \in G$

$$v_F(\sigma-\tau) = \frac{1}{r}\, v_E(\sigma-\tau) = \inf\{v_F(\sigma(x)-\tau(x)) \mid x \in \mathcal{O}_E\} \quad .$$

<u>Proposition</u> A.5.1. <u>Fixons</u> $\sigma_o \in G$. <u>On a</u>

$$\text{(A.5.2)} \qquad \varphi_{E/F}(\ell)+1 = \sum_{\sigma\neq\sigma_o} v_F(\sigma-\sigma_o) + \sup_{\sigma\neq\sigma_o} v_F(\sigma-\sigma_o) \quad .$$

<u>Preuve</u>. Dans la somme $\sum_{\sigma\neq\sigma_o} v_E(\sigma-\sigma_o)$, groupons les termes égaux et écrivons la somme sur t obtenue comme une intégrale de Stieltjes étendue de -1 à ∞ ou de -1 à $\ell+0$, cela revient au même :

$$\sum_{\sigma\neq\sigma_o} v_E(\sigma-\sigma_o) = \sum_t (t+1)(r_t - r_{t+0}) = \int_{-1}^{\ell+0} -(t+1)dr_t \quad .$$

Intégrons par partie :

$$= \int_{-1}^{\ell} dt.r_t - [(t+1).r_t]_{-1}^{\ell+0}$$

$$= r_o \int_{-1}^{\ell} dt/(r_o:r_t) - (\ell+1)$$

$$= r_o(\varphi(\ell)+1) - (\ell+1) \quad .$$

Divisant par l'indice de ramification $r = r_o$, on obtient (A.5.2).

Pour $u \geq \ell$, on a $\varphi_{E/F}(u)+1 = \varphi_{E/F}(\ell)+1+\frac{1}{r}(u-\ell) = [(\varphi_{E/F}(\ell)+1)-\frac{1}{r}(\ell+1)] + \frac{1}{r}(u+1)$, soit par (A.5.2)

(A.5.3) $$\varphi_{E/F}(u)+1 = \frac{1}{r}(u+1) + \sum_{\sigma\neq\sigma_o} v_F(\sigma-\sigma_o) \qquad (u \geq \ell),$$

et pour la fonction inverse $\Psi_{E/F}$

(A.5.4) $$\Psi_{E/F}(f)+1 = r(f+1) - \sum_{\sigma\neq\sigma_o} v_E(\sigma-\sigma_o) \qquad (f \geq \varphi_{E/F}(\ell)).$$

Le second terme au second membre est la valuation de la différente.

Si f est un entier $\geq \varphi_{E/F}(\ell)$, $\Psi_{E/F}(f)$ est donc entier.

Proposition A.6.1. Pour tout nombre réel f, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La relation d'équivalence R^f est triviale.

(ii) La clôture normale E' de E vérifie $\mathrm{Gal}(E'/E)^f = \{e\}$.

(iii) Pour ℓ comme en A.5, $\varphi_{E/F}(\ell) < f$.

(iv) $\sum_{\sigma\neq\sigma_o} v_F(\sigma-\sigma_o) + \sup_{\sigma\neq\sigma_o} v_F(\sigma-\sigma_o) < f+1$.

Pour prouver (i)$\Leftrightarrow$(ii), on prend $M = E'$ et on utilise que les classes mod R^f sont les orbites de $\mathrm{Gal}(M/F)^f$ (A.4). Que (i)$\Leftrightarrow$(iii) est la définition de ℓ et (iii)$\Leftrightarrow$(iv) d'après A.5.1.

Soit P le polynôme caractéristique d'un générateur x de $\mathcal{O}_E$ sur $\mathcal{O}_F$ (cf. (A.3)). La proposition suivante réinterprète (A.6.1) (iv) en terme des racines approchées de P.

Proposition A.6.2. Pour que les conditions équivalentes de (A.6.1) soient vérifiées, il faut et il suffit que pour tout y dans une clôture séparable de $\overline{F}$ de F vérifiant $v_F(P(y)) \geq f+1$, il existe une racine z de P plus proche que les autres : $v_F(y-z) > v_F(y-z')$ pour z' une autre racine de P.

Preuve. Si z est une racine de P aussi proche de y que possible ($v(y-z)$ maximal), on a pour toute racine z'

$$v_F(y-z') = \inf(v_F(y-z), v_F(z'-z)) ,$$

d'où

$$v_F P(y) = v_F(y-z) + \sum_{z' \neq z} \inf(v_F(y-z), v_F(z'-z)) .$$

Comparant à (A.5.2) en utilisant (A.3.5), on trouve que pour que la racine z soit plus proche de y que les autres, il faut et il suffit que

$$v_F P(y) > \varphi_{E/F}(\ell)+1 .$$

Que ce soit toujours conséquence de $v_F P(y) \geq f+1$ équivaut à $\varphi_{E/F}(\ell) < f$.

Remarque A.6.3. Soient ℓ comme en A.5 : $\ell+1 = \sup v_E(\sigma-\sigma_o)$ et $L = \varphi_{E/F}(\ell)$. Soit z une racine de P dans $\overline{F}$. D'après A.6.2, l'application $y \longmapsto P(y)$ induit une bijection du disque $\{y \mid v_E(y-z) > \ell+1\}$ vers le disque $\{a \mid v_F(a) > L+1\}$. Pour chaque solution approchée y : $v_F P(y) > L+1$, la racine z de P plus proche de y que les autres peut être obtenue par la méthode de Newton, et $v_F(y-z) = v_F(P(y)/P'(z))$. En terme de la fonction $\psi_{E/F}$ réciproque de $\varphi_{E/F}$, on a par (A.5.4) : si f vérifie les conditions équivalentes de A.6.1 et A.6.2, l'application $y \longmapsto P(y)$ induit une bijection

$$\{y \mid v_E(y-z) \geq \psi_{E/F}(f)+1\} \xrightarrow{\sim} \{a \mid v_F(a) \geq f+1\} .$$

Remarque A.6.4. Avec la même hypothèse sur f , si y est une solution approchée de $P = 0$ dans une extension E de F , au sens $v_F P(y) \geq f+1$, la racine y_o de P la plus proche de y , étant obtenue par la méthode de Newton, sera encore dans F , et $v_E(y-y_o) \geq \psi_{E/F}(f)+1$. Réciproquement, si $v_E(y-y_o) \geq \psi_{E/F}(f)+1$, alors $v_F P(y) \geq f+1$.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. DELIGNE et G. HENNIART, Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L . Inv. Math. 64 89-118 (1981).

2. P. DELIGNE, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L . Dans Modular functions of one variable II. p. 501-597. Anvers 1972- Lecture Notes in Math. 349 (Springer Verlag, 1973).

3. M. KRASNER, Notes aux Comptes Rendus t. 224 (1947) p. 173-175 et p. 434-436.

4. M. KRASNER, Quelques méthodes nouvelles dans la théorie des corps values complets. Coll. Int. du C.N.R.S. 24. Paris 1949.

5. M. KRASNER, Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique 0. Coll. d'algèbre supérieure, Bruxelles 1957 (C.B.R.M).

6. J.-P. SERRE, Corps locaux. Hermann, Paris 1962.

7. J.-P. SERRE, Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos. Bull. Soc. Math. Fr. 89 (1961) p. 105-154.