AUTRES COMMUNICATIONS

ALGÈBRE

Cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupes croisés sur un site (I)

par RAYMOND DEBREMAEKER (*)
Katholieke Universiteit Leuven, Departement Wiskunde

Nous examinons l'obstruction au relèvement d'un C-torseur P relativement à un épimorphisme $v: B \to C$ de faisceaux de groupes sur un site E. Le résultat conduit à la notion de (A,Π)-gerbe et nous définissons $H^2(A,\Pi)$ comme l'ensemble des classes de (A,Π)-gerbes qui sont (A,Π)-équivalentes.

1. OBSTRUCTION AU RELÈVEMENT D'UN TORSEUR

Soient E un site et

$$1 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 1$$

une suite exacte courte de faisceaux de groupes sur E. Dans son livre [3], J. Giraud examine l'obstruction au relèvement à B d'un C-torseur P par l'épimorphisme $v: B \to C$. Il obtient comme obstruction une gerbe K(P) sur E. Cette analyse n'est cependant pas complète. En effet, on a en outre un morphisme de gerbes sur E

$$\nu: K(P) \to TORSC(E; Int(B))$$

où $Int(B)$ désigne le faisceau des automorphismes intérieurs de B. Si (Q,λ) est un objet de la catégorie fibre $K(P)_S$, $S \in Ob(E)$, on définit

$$\nu(Q,\lambda) = Q \overset{B}{\wedge} Int(B).$$

(*) Présenté par M. R. DEBEVER.

L'action de ν sur les morphismes est définie par la fonctorialité de l'opération produit contracté. Pour tout objet (Q,λ) de $K(P)_S$, $S \in Ob(E)$, on a un isomorphisme naturel

$$k_{(Q,\lambda)}: Aut_S(Q,\lambda) \xrightarrow{\sim} \nu(Q,\lambda) \overset{Int(B)}{\wedge} A.$$

car $Aut_S(Q,\lambda)$ et $\nu(Q,\lambda) \overset{Int(B)}{\wedge} A$ sont tous les deux groupe tordu de A par le $Int(B)$-torseur $\nu(Q,\lambda)$. Puisque les isomorphismes $k_{(Q,\lambda)}$ sont compatibles avec la restriction, ils déterminent un isomorphisme de morphismes de champs

$$k: \mathrm{Aut}(K(P)) \xrightarrow{\sim} (- \overset{Int(B)}{\wedge} A) \circ \nu$$

où $- \overset{Int(B)}{\wedge} A$ désigne le E-foncteur de $TORSC(E, Int(B))$ vers FAGRSC(E), qui associe à un $Int(B)$-torseur P le faisceau de groupes $P \overset{Int(B)}{\wedge} A$.

Le triple $(K(P), \nu, k)$ satisfait la condition suivante. Soit S un objet de E et (Q,λ) un objet de la catégorie fibre $K(P)_S$. Pour tout élément $x \in \nu(Q,\lambda) \overset{Int(B)}{\wedge} A$ et pour tout représentant local (σ,a) de x, on a

$$\nu(k^{-1}_{(Q,\lambda)}(x))(\sigma) = \sigma \circ \mathrm{int}(a).$$

Cette formule exprime également la commutativité du diagramme suivant où $t_{\nu(Q,\lambda)}$ est l'isomorphisme canonique entre deux représentants du groupe tordu de $Int(B)$ par $\nu(Q,\lambda)$ et où $\rho: A \to Int(B)$ est définie par $\rho(a) = \mathrm{int}(a)$.

$$\begin{tikzcd}
Aut_S(Q,\lambda) \arrow[r, "\mathrm{Aut}(\nu)_{(Q,\lambda)}"] \arrow[d, "k_{(Q,\lambda)}"', "\wr"] & Aut_S(\nu(Q,\lambda)) \arrow[d, "t_{\nu(Q,\lambda)}", "\wr"'] \\
\nu(Q,\lambda) \overset{Int(B)}{\wedge} A \arrow[r, "id \wedge \rho"'] & \nu(Q,\lambda) \overset{Int(B)}{\wedge} Int(B).
\end{tikzcd}$$

On voit donc que l'obstruction au relèvement d'un C-torseur P à B est un triple $(K(P), \nu, k)$ vérifiant la condition ci-dessus.

2. (A,Π)-GERBE SUR UN SITE

Soit $\Phi = (A,\rho,\Pi,\phi)$ un faisceau de groupes croisés sur le site E que nous noterons aussi, en abrégé, $\Phi = (A,\Pi)$.

DÉFINITION 2.1. — On appelle (A,Π)-*gerbe* sur E un triple

$$(G,\mu,j)$$

où G est une gerbe sur E, $\mu: G \to \mathrm{TORSC}(E,\Pi)$ un morphisme de gerbes sur E, et $j: \mathrm{Aut}(G) \simeq (- \overset{\Pi}{\wedge} A) \circ \mu$ un isomorphisme de morphismes de champs sur E, ces données étant soumises à la condition suivante: Pour tout objet S de E et tout $x \in \mathrm{Ob}(G_S)$, le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
Aut_S(x) \arrow[r, "\mathrm{Aut}(\mu)_x"] \arrow[d, "j_x"', "\wr"] & Aut_S(\mu(x)) \arrow[d, "t_{\mu(x)}", "\wr"'] \\
\mu(x) \overset{\Pi}{\wedge} A \arrow[r, "id \wedge \rho"'] & \mu(x) \overset{\Pi}{\wedge} \Pi.
\end{tikzcd}$$

REMARQUE 2.2. — Cette condition exprime que le morphisme $\mathrm{Aut}(\mu)_x$ s'identifie, via les isomorphismes j_x et $t_{\mu(x)}$, avec le morphisme tordu

$$\mu(x)_\rho = id \wedge \rho.$$

PROPOSITION 2.3. — *Soit* (A,Π) *un faisceau de groupes croisés sur le site* E. *La gerbe* TORSC(E,A) *des* A-*torseurs sur* E *a canoniquement une structure de* (A,Π)-*gerbe.*

La structure de (A,Π)-gerbe est définie comme suit: à tout A-torseur P sur E/S, $S \in Ob(E)$ *on associe le* Π-*torseur* $\mu_\Pi(P) = P \overset{A}{\wedge} \Pi$,

$$j_\Pi(P): Aut_S(P) \simeq \mu_\Pi(P) \overset{\Pi}{\wedge} A$$

est l'isomorphisme naturel que l'on obtient comme le composé des isomorphismes évidents suivants

$$Aut_S(P) \simeq P \overset{A}{\wedge} A \simeq P \overset{A}{\wedge} (\Pi \overset{\Pi}{\wedge} A) \simeq (P \overset{A}{\wedge} \Pi) \overset{\Pi}{\wedge} A = \mu_\Pi(P) \overset{\Pi}{\wedge} A.$$

TORSC(E,A) *muni de sa structure canonique de* (A-Π)-*gerbe, sera noté* $(\mathrm{TORSC}(E,A),\mu_\Pi,j_\Pi)$.

DÉFINITION 2.4. — Soient $(f,\varphi): (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ un morphisme de faisceaux de groupes croisés, (G,μ,j) une (A,Π)-gerbe et (G',μ',j') une (A',Π')-gerbe sur E.

On appelle (f,φ)-*morphisme* de (G,μ,j) vers (G',μ',j') un couple (λ,i) où $\lambda: G \to G'$ est un morphisme de gerbes sur E et où $i: \mathrm{TORSC}(E,\varphi) \circ \mu \simeq \mu' \circ \lambda$ est un isomorphisme de morphisme de gerbes tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(G) \arrow[r, "\mathrm{Aut}(\lambda)"] \arrow[d, "j"'] & \mathrm{Aut}(G') \circ \lambda \arrow[d, "j' * \lambda"] \\
(- \overset{\Pi}{\wedge} A) \circ \mu \arrow[r, "\omega"'] & ((- \overset{\Pi'}{\wedge} A') \circ \mu') \circ \lambda.
\end{tikzcd}$$

Ici, pour tout objet x de G_S, $S \in Ob(E)$, le morphisme ω_x est le composé suivant:

$$\mu(x) \overset{\Pi}{\wedge} A \xrightarrow[p_x \wedge f]{} (\mu(x) \overset{\Pi}{\wedge} \Pi') \overset{\Pi'}{\wedge} A' \xrightarrow[i_x \wedge id_{A'}]{} \mu'(\lambda(x)) \overset{\Pi'}{\wedge} A'.$$

Nous indiquons comment se composent les morphismes de (A,Π)-gerbes. Soient $(f,\varphi): (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ et $(g,\psi): (A',\Pi') \to (A'',\Pi'')$ des morphismes de faisceaux de groupes croisés sur le site E. Soit en outre

$$(\delta,i): (G,\mu,j) \to (G',\mu',j')$$

un (f,φ)-morphisme et $(\lambda,m): (G',\mu',j') \to (G'',\mu'',j'')$ un (g,ψ)-morphisme. Pour tout $x \in Ob(G_S)$, $S \in Ob(E)$, on a les isomorphismes suivants:

$$\mu(x) \overset{\Pi}{\wedge} \Pi'' \xrightarrow[c_x]{\sim} (\mu(x) \overset{\Pi}{\wedge} \Pi') \overset{\Pi'}{\wedge} \Pi'' \xrightarrow[i_x \wedge \Pi'']{\sim} \mu'(\delta(x)) \overset{\Pi'}{\wedge} \Pi'' \xrightarrow[m_{\delta(x)}]{\sim} \mu''(\lambda \circ \delta(x)).$$

Posons maintenant

$$(m \ast i)_x = m_{\delta(x)} \circ (i_x \wedge \Pi'') \circ c_x,$$

nous obtenons un isomorphisme $m \bar{*} i$: $\mathrm{TORSC}(E,\psi \circ \varphi) \circ \mu \xrightarrow{\sim} \mu' \circ (\lambda \circ \delta)$. Le couple

$$(\lambda \circ \delta, m \bar{*} i)$$

est un $(g,\psi) \circ (f,\varphi)$-morphisme de gerbes que nous appelons le composé de (δ,i) et (λ,m).

DÉFINITION 2.5. — *Morphisme de morphismes de gerbes munies d'une structure de groupes croisés.* Soient $(f,\varphi)\colon (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ un morphisme de faisceaux de groupes croisés, (λ_1,i_1) et (λ_2,i_2) deux (f,φ)-morphismes d'une (A,Π)-gerbe (G,μ,j) vers la (A',Π')-gerbe (G',μ',j'). On appelle morphisme de (λ_1,i_1) vers (λ_2,i_2) un morphisme de E-foncteurs

$$m\colon \lambda_1 \to \lambda_2$$

tel que

$$\boxed{(\mu' * m) \circ i_1 = i_2.}$$

Suivent maintenant quelques propriétés des morphismes de gerbes munies d'une structure de groupes croisés.

PROPOSITION 2.6. — *Soient* (G,μ,j) *une* (A,Π)*-gerbe et* $\lambda\colon F \overset{\approx}{\to} G$ *une* E*-équivalence de gerbes sur* E.

(i) *La gerbe* F *a canoniquement une structure de* (A,Π)*-gerbe, notée* (F,μ^*,j^*).

(ii) *On a un isomorphisme canonique*

$$i\colon \mathrm{TORSC}(E,1_\Pi) \circ \mu^* \xrightarrow{\sim} \mu \circ \lambda$$

tel que (λ,i) *soit un* $id_{(A,\Pi)}$*-morphisme.*

DÉFINITION 2.7. — On dit que cette structure de (A,Π)-gerbe sur F est *induite* par celle de G par λ.

PROPOSITION 2.8. — *Soient* $(f,\varphi)\colon (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ *un morphisme de faisceaux de groupes croisés sur un site* E *et* $(\lambda,i)\colon (G,\mu,j) \to (G',\mu',j')$ *un* (f,φ)*-morphisme de gerbes sur* E. *Si* (f,φ) *est un isomorphisme de faisceaux de groupes croisés, le morphisme* λ *est une* E*-équivalence.*

COROLLAIRE 2.9. — *Si* (G,μ,j) *et* (G',μ',j') *sont deux* (A,Π)*-gerbes et si* $(\lambda,i)\colon (G,\mu,j) \to (G',\mu',j')$ *est un* $id_{(A,\Pi)}$*-morphisme, le morphisme* λ *est une* E*-équivalence.*

Nous disons que (G,μ,j) et (G',μ',j') sont des gerbes (A,Π)-équivalentes et nous appelons (λ,i) une (A,Π)-équivalence.

PROPOSITION 2.10. — *Soit* $(f,\varphi)\colon (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ *un morphisme de faisceaux de groupes croisés sur le site* E. *On a un isomorphisme canonique*

$$i_{(f,\varphi)}\colon \mathrm{TORSC}(E,\varphi) \circ \mu_\Pi \xrightarrow{\sim} \mu'_{\Pi'} \circ \mathrm{TORSC}(E,f)$$

tel que

$$(\mathrm{TORSC}(E,f), i_{(f,\varphi)})\colon (\mathrm{TORSC}(E,A), \mu_\Pi, j_\Pi) \to (\mathrm{TORSC}(E,A'), \mu'_{\Pi'}, j'_{\Pi'})$$

soit un (f,φ)*-morphisme.*

3. Cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupes croisés

Il résulte de 1 qu'on doit utiliser la catégorie des faisceaux de groupes croisés comme catégorie des coefficients pour la 2-cohomologie non abélienne. Ceci est en accord avec le point de vue de P. Dedecker comme il ressort de sa cohomologie des groupes et de sa 2-cohomologie non abélienne d'un espace topologique [1,2].

Soit $\Phi = (A,\rho,\Pi,\phi)$ un faisceau de groupes croisés sur un site E. La cohomologie en dimension 0 et 1 coïncide avec celle de Giraud. Nous avons donc:

$$H^0(E,\Phi) = H^0(A) = \varprojlim A$$

$H^1(E,\Phi) = H^1(A) =$ l'ensemble des classes à isomorphisme près de A-torseurs sur E.

DÉFINITION. — $H^2(E,\Phi)$ est l'ensemble des classes à (A,Π)-équivalence près de (A,Π)-gerbes sur E.

Au lieu de $H^2(E,\Phi)$, nous utiliserons aussi la notation $H^2(A,\Pi)$. On dira qu'une classe est neutre si un de ses représentants admet une section. D'après la proposition 2.3, TORSC(E,A) possède canoniquement une structure de (A,Π)-gerbe. On appelle classe unité celle de la (A,Π)-gerbe $(\mathrm{TORSC}(E,A),\mu_\Pi,j_\Pi)$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P. DEDECKER, *Sur la cohomologie non abélienne I*, Can. J. Math. 12 (1960), 231-251.

[2] P. DEDECKER, *Les foncteurs* Ext_{Π}, H^2_{Π}, H^2_{Π} *non abéliens*. C.R. Acad. Sc. Paris 258 (1964), 4981-4894.

[3] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band 179, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

ALGÈBRE

Cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupes croisés sur un site (II)

par RAYMOND DEBREMAEKER (*)
Katholieke Universiteit Leuven, Departement Wiskunde

À un morphisme de faisceaux de groupes croisés $(f,\varphi)\colon(\mathrm{A},\Pi)\to(\mathrm{A}',\Pi')$, on associe une application $(f,\varphi)^{(2)}\colon \mathrm{H}^2(\mathrm{A},\Pi)\to\mathrm{H}^2(\mathrm{A}',\Pi')$. Le H^2 est alors un foncteur de la catégorie des faisceaux de groupes croisés vers la catégorie des ensembles balisés. À une suite exacte courte de faisceaux de groupes croisés correspond une suite de cohomologie exacte. On compare le H^2 à celui de J. Giraud.

1. Dans une note précédente [1], nous avons défini la 2-cohomologie d'un site à valeurs dans un faisceau de groupes croisés. Si (A,Π) est un faisceau de groupes croisés sur le site E, alors $\mathrm{H}^2(\mathrm{A},\Pi)$ est l'ensemble des classes à (A,Π)-équivalence près de (A,Π)-gerbes sur E. Cet ensemble contient un sous-ensemble d'éléments particuliers, à savoir les éléments neutres.

Soit $(f,\varphi)\colon(\mathrm{A},\Pi)\to(\mathrm{A}',\Pi')$ un morphisme de faisceaux de groupes croisés sur E. Comment peut-on lui associer une application de $\mathrm{H}^2(\mathrm{A},\Pi)$ vers $\mathrm{H}^2(\mathrm{A}',\Pi')$? Si (G,μ,j) est une (A,Π)-gerbe, il est toujours possible de lui associer une (A',Π')-gerbe (G',μ',j') ainsi qu'un (f,φ)-morphisme $(\lambda,i)\colon(\mathrm{G},\mu,j)\to(\mathrm{G}',\mu',j')$. On peut ici supposer que G est une (A,Π)-gerbe scindée, car J. Giraud a démontré en [3] que toute E-catégorie fibrée est E-équivalente à une E-catégorie scindée. La construction de G′ se déroule en deux étapes. Nous n'en donnons ici que les grandes lignes.

(*) Présenté par M. R. DEBEVER.

1re étape: La construction du E-préchamp scindé G^*

On construit un foncteur

$$G^*: E^0 \to (\mathrm{Cat})$$

tel que les trois conditions suivantes soient satisfaites:

(i) $Ob(G^*(S)) = Ob(G_S)$ pour tout $S \in Ob(E)$.

(ii) Les préfaisceaux des S-morphismes de G^* sont des faisceaux.

(iii) Pour tout $z \in Ob(G^*(S))$, $S \in Ob(E)$, le préfaisceau $Aut_S(z)$ est *localement* isomorphe à A'.

En plus, cette construction fournit un morphisme de E-catégories scindées:

$$\lambda^*: G \to G^* \quad \lambda^*(x) = x, \quad x \in Ob(G_S). \tag{1}$$

2e étape: La (A',Π')*-gerbe* (G',μ',j').

Nous passons maintenant au champ scindé associé à G^*:

$$G' = A(G^*).$$

Par construction, on a un morphisme bicouvrant

$$a: G^* \to G' = A(G^*). \tag{2}$$

Par composition de (1) et (2), nous obtenons un morphisme de E-catégories scindées:

$$\lambda: G \to G'.$$

La E-catégorie G' est une gerbe, et nous avons un E-foncteur cartésien $\mu': G' \to \mathrm{TORSC}(E,\Pi')$ ainsi qu'un isomorphisme de morphismes de champs

$$j': \mathrm{Aut}(G') \simeq (- \overset{\Pi'}{\wedge} A') \circ \mu'$$

tel que (G',μ',j') soit une (A',Π')-gerbe.

De plus, on a pour tout $x \in Ob(G_S)$, $S \in Ob(E)$ un isomorphisme naturel

$$i_x: \mu(x) \overset{\Pi}{\wedge} \Pi' \simeq \mu'(\lambda(x))$$

tel que (λ,i) soit un (f,φ)-morphisme.

En résumé, nous avons:

THÉORÈME. — *Soient* $(f,\varphi): (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ *un morphisme de faisceaux de groupes croisés et* (G,μ,j) *une* (A,Π)*-gerbe. Il existe une* (A',Π')*-gerbe* (G',μ',j') *ainsi qu'un* (f,φ)*-morphisme* $(\lambda,i): (G,\mu,j) \to (G',\mu',j')$.

2. *Fonctorialité du* H^2. — Pour définir l'action du H^2 sur les morphismes de faisceaux de groupes croisés, nous avons besoin du théorème suivant:

THÉORÈME. — Soient $(f,\varphi): (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ un morphisme de faisceaux de groupes croisés, $(\gamma_1,i_1): (G,\mu,j) \to (G_1,\mu_1,j_1)$ et $(\gamma_2,i_2): (G,\mu,j) \to (G_2,\mu_2,j_2)$ deux (f,φ)-morphismes de même source. Alors il existe une (A',Π')-équivalence

$$(\delta,\varepsilon): (G_1,\mu_1,j_1) \overset{\approx}{\to} (G_2,\mu_2,j_2)$$

telle que $(\delta,\varepsilon) \circ (\gamma_1,i_1) \simeq (\gamma_2,i_2)$.

À un morphisme de faisceaux de groupes croisés $(f,\varphi): (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ nous associons une *application*

$$(f,\varphi)^{(2)}: H^2(A,\Pi) \to H^2(A',\Pi')$$

qui à un élément $g = [(G,\mu,j)]$ de $H^2(A,\Pi)$ fait correspondre l'élément $(f,\varphi)^{(2)}(g) = [(F,\nu,k)]$ de $H^2(A',\Pi')$. Ici (F,ν,k) est une (A',Π')-gerbe pour laquelle il existe un (f,φ)-morphisme $(\delta,\varepsilon): (G,\mu,j) \to (F,\nu,k)$.

Cette application envoie un élément neutre de $H^2(A,\Pi)$ sur un élément neutre de $H^2(A',\Pi')$.

Pour tout couple de morphismes de faisceaux de groupes composables (f,φ) et (g,ψ) on a

$$(g,\psi)^{(2)} \circ (f,\varphi)^{(2)} = (g \circ f, \psi \circ \varphi).$$

3. *Exactitude de la suite cohomologique.* — Considérons une suite exacte courte de faisceaux de groupes croisés sur le site E:

$$(*) \quad e \to \Phi = (A,\rho,\Pi,\phi) \xrightarrow[(f,\varphi)]{} \Phi' = (A',\rho',\Pi',\phi') \xrightarrow[(h,\psi)]{} \Phi'' = (A'',\rho'',\Pi'',\phi'') \to e.$$

Rappelons que ceci signifie que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} & \Pi \arrow[r, "\varphi"] & \Pi' \arrow[r, "\psi"] & \Pi'' & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[u, "\rho'"] \arrow[r, "h"'] & A'' \arrow[u, "\rho''"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

et que de plus les deux conditions suivantes soient vérifiées:

(i) $1 \to A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{h} A'' \to 1$ est une suite exacte de faisceaux de groupes sur le site E.

(ii) $\varphi : \Pi \to \Pi'$ est un isomorphisme et $\psi : \Pi' \to \Pi''$ est un épimorphisme.

(D'après (ii) nous pouvons identifier Π et Π', et remplacer le diagramme ci-dessus par

$$\begin{tikzcd} & \Pi \arrow[r, "id"] & \Pi \arrow[r, "\psi"] & \Pi'' & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[u, "\rho'"] \arrow[r, "h"'] & A'' \arrow[u, "\rho''"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant définir le second cobord.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* (*) *une suite exacte courte de faisceaux de groupes croisés et soit*

$$(\gamma, i) : (G', \mu', j') \to (G'', \mu'', j'')$$

un (h, ψ)*-morphisme de gerbes.*

Alors, si s est une section de G″, *la gerbe* K(s) *des relèvements de s à* G′ *possède une structure de* (A,Π)*-gerbe*:

$$(K(s), \mu_s, j_s).$$

De plus, on a un isomorphisme

$$i(s) : \mathrm{TORSC}(E, 1_\Pi) \circ \mu_s \simeq \mu' \circ k(s)$$

tel que $(k(s), i(s)) : (K(s), \mu_s, j_s) \to (G', \mu', j')$ *est un* $(f, 1_\Pi)$*-morphisme.*

Ce théorème peut être appliqué dans la situation suivante:

Soient (*) une suite exacte de faisceaux de groupes croisés et P un A″-torseur.

D'après [1]

$$(\mathrm{TORSC}(E,h), i_{(h,\psi)}) : (\mathrm{TORSC}(E,A'), \mu'_\Pi, j'_\Pi) \to (\mathrm{TORSC}(E,A''), \mu''_{\Pi''}, j''_{\Pi''})$$

est un (h,ψ)-morphisme et le A″-torseur P définit une section de TORSC(E,A″) que nous noterons s_P. D'après le théorème 3.1 on a sur la gerbe K(P) des relèvements de P à A′ une structure de (A,Π)-gerbe. Si nous considérons la gerbe K(P) munie de cette structure, nous la notons par

$$(K(P), \mu_P, j_P).$$

Ensuite, on a un isomorphisme

$$i_P : \mathrm{TORSC}(E, 1_\Pi) \circ \mu_P \simeq \mu_\Pi \circ k(P)$$

tel que $(k(P), i_P)$ soit un $(f, 1_\Pi)$-morphisme.

DÉFINITION 3.2. — À la suite exacte courte (*), nous associons une application

$$d : H^1(E, \Phi'') \to H^2(E, \Phi)$$

qui applique un élément $p = [P]$ de $H^1(E,\Phi'')$ sur l'élément $[(K(P), \mu_P, j_P)]$ de $H^2(E,\Phi)$.

On appelle d le *second cobord.*

PROPOSITION 3.3. — *Soient* $(f,\varphi) : (A,\Pi) \to (A',\Pi')$ *un morphisme de faisceaux de groupes croisés et* $(\gamma, i) : (G, \mu, j) \to (G', \mu', j')$ *un* (f, φ)*-morphisme.*

Si f est le morphisme unité, il existe une section s de G′ *telle que* $\gamma \simeq s \circ g$, *où* $g : G \to E$ *est la projection de* G *sur* E.

PROPOSITION 3.4. — *Soit* (G,μ,j) *une* (A,Π)*-gerbe sur* E.

Si $(\gamma,i)\colon(G,\mu,j)\to(\mathrm{TORSC}(E,A'),\mu'_\Pi,j'_\Pi)$ *est un* $(f,1_\Pi)$*-morphisme, alors il existe un* A″*-torseur* P *ainsi qu'une* (A,Π)*-équivalence* (δ,ε): $(G,\mu,j)\overset{\approx}{\to}(K(P),\mu_P,j_P)$.

À la suite exacte courte (*), on peut associer une suite cohomologique

$$1\to H^0(E,\Phi)\to\dots$$

$$\to H^1(E,\Phi'')\xrightarrow{d}H^2(E,\Phi)\xrightarrow{(f,1_\Pi)^{(2)}}H^2(E,\Phi')\xrightarrow{(h,\psi)^{(2)}}H^2(E,\Phi'')$$

dont l'exactitude est formulée dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3.5

(i) $p\in H^1(E,\Phi'')$ appartient à $\mathrm{Im}(H,\psi)^{(1)}$ si et seulement si $d(p)$ est un élément neutre.

(ii) $x\in H^2(E,\Phi)$ appartient à l'image de d si et seulement si $(f,1_\Pi)^{(2)}(x)$ est l'élément unité.

(iii) $x\in H^2(E,\Phi')$ appartient à $\mathrm{Im}(f,1_\Pi)^{(2)}$ si et seulement si $(h,\psi)^{(2)}(x)$ est un élément neutre.

4. *Comparaison avec le* H^2 *de J. Giraud.* — Pour distinguer le H^2 de J. Giraud de celui que nous avons défini ici, nous le désignerons dans ce qui suit par H^2_G.

Soit A un faisceau de groupes sur le site E. Alors J. Giraud définit $H^2_G(A)$ comme l'ensemble des classes à lien (A)-équivalence près de lien (A)-gerbes sur E. Rappelons qu'un lien (A)-gerbe est un couple (F,a) où F est une gerbe sur E et $a\colon L\circ f\overset{\sim}{\to}\mathrm{lien}(F)$ un isomorphisme de liens sur E. Ceci signifie que pour tout objet x de F_S, $S\in Ob(E)$, on a un isomorphisme de liens sur S

$$a(x)\colon L(S)=\mathrm{lien}(A)^S\overset{\sim}{\to}\mathrm{lien}(Aut_S(x))$$

tel que la famille de tous ces isomorphismes est compatible avec la localisation, et de plus satisfait la condition que pour tout S-isomorphisme $i\colon x\overset{\sim}{\to}y$ de F le morphisme de faisceaux de groupes $\mathrm{Int}(i)\colon Aut_S(x)\to Aut_S(y)$ représente le morphisme identique de L(S).

PROPOSITION 4.1. — *Soit* (F,a) *un lien* (A)*-gerbe sur* E.

(i) *La structure de lien* (A)*-gerbe sur* F *détermine canoniquement une structure de* $(A,Int(A))$*-gerbe sur* F:

$$(F,\mu_a,j_a).$$

(ii) *Si* (G,b) *est également une lien* (A)*-gerbe, et* $\delta\colon F\overset{\approx}{\to}G$ *une lien* (A)*-équivalence, alors on a un isomorphisme canonique*

$$i\colon \mathrm{TORSC}(E,1_{Int(A)})\circ\mu_a\overset{\sim}{\to}\mu_b\circ\delta,$$

tel que (δ,i) *soit une* $(A,Int(A))$*-équivalence.*

On peut maintenant définir une application

$$(^{**})\quad H^2_G(A)\to H^2(A,Int(A))$$

en associant à la classe $[(F,a)]$ de la lien (A)-gerbe (F,a) la classe $[(F,\mu_a,j_a)]$ de la $(A,Int(A))$-gerbe (F,μ_a,j_a).

PROPOSITION 4.2. — *L'application* (**) *est bijective.*

Il devient clair maintenant pourquoi la cohomologie de Giraud *n'est pas* fonctorielle.

Si $f\colon A\to A'$ est un morphisme de faisceaux de groupes sur E, alors Giraud ne peut y associer en général qu'une relation

$$f^{(2)}\colon H^2_G(A)\multimap H^2_G(A').$$

Si cependant $C_{A'}\overset{\sim}{\to}C_f$, alors cette relation est une *application*.

Pour construire une application de $H^2_G(A)\simeq H^2(A,Int(A))$ vers

$$H^2_G(A')\simeq H^2(A',Int(A')),$$

il n'est pas suffisant de donner un morphisme de faisceaux de groupes $f\colon A\to A'$.

Il est en outre nécessaire d'avoir un morphisme $\varphi\colon Int(A)\to Int(A')$ tel que (f,φ) soit un morphisme de faisceaux de groupes croisés. Si la condition $C_{A'}\overset{\sim}{\to}C_f$ est vérifiée nous voyons que le morphisme donné $f\colon A\to A'$ induit un morphisme de $Int(A)$ vers $Int(A')$, de telle sorte qu'on peut définir une application de $H^2_G(A)$ vers $H^2_G(A')$.

Quand on donne une suite exacte courte de faisceaux de groupes sur E

$$1\to A\xrightarrow{u}B\xrightarrow{v}C\to 1\tag{1}$$

alors $H^2_G(A)$ ne suffit pas à mesurer l'obstruction à relever à B un C-torseur. C'est pourquoi J. Giraud a été obligé d'introduire l'ensemble $O(v)$. La vraie raison de ceci devient claire si l'on considère le fait que la suite (1) induit la suite exacte courte de faisceaux de groupes croisés ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & Int(B) \arrow[r, equal] & Int(B) \arrow[r] & Int(C) & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r, "u"] & B \arrow[u] \arrow[r, "v"] & C \arrow[u] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que les obstructions aux relèvements des C-torseurs à B aboutissent dans $H^2(A, Int(B))$, et non pas dans $H^2_G(A) \approx H^2(A, Int(A))$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. Debremaeker, *Cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupes croisés sur un site* I, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. tome LXIII (1977), 758-764.

[2] P. Dedecker, *Séminaire sur la cohomologie non abélienne.* Universidade Federal Fluminense. Niteroi, Edo. Rio de Janeiro, Brasil, 1971.

[3] J. Giraud, *Méthode de la descente.* Mémoire Soc. Math. Fr. 2 (1964).

[4] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne.* Grundlehren der Math. Wiss. n° 179, Springer 1971.